Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

LØSNING: Eksamen 21. des. 2017

"*MAT100 Matematikk*"

a) Alle størrelsene H, D og S er positive. Dermed:

i) Q øker $\Rightarrow$ $\underline{\underline{HQ/2 \text{ øker}}}$
ii) Q øker $\Rightarrow$ $\underline{\underline{DS/Q \text{ minker}}}$

b) Perioden t_0 er definert ved nullpunktet:

$$i(t_0) = 0 \tag{1}$$

Siden $i(t) = Q^* - Dt$ så får vi:

$$Q^* - Dt = 0 \tag{2}$$

$$Q^* = Dt \tag{3}$$

$$\frac{Q^*}{D} = \frac{\cancel{D}t}{\cancel{D}} \tag{4}$$

som gir

$$\underline{\underline{t_0 = \frac{Q^*}{D}}} \tag{5}$$

c) Bruker den oppgitt EOQ-formelen og setter inn tallene:

$$\underline{Q^*} = \sqrt{\frac{2\,DS}{H}} \tag{6}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 230\,000 \cdot 1\,250\,000}{5\,000}}\ \text{tonn} = \underline{10\,724\ \text{tonn}} \tag{7}$$

dvs. det må produseres $\underline{\underline{Q^* = 10\,724}}$ tonn aluminium i hver produksjonsserie

d) Bruker formelen $t_0 = Q^*/D$ fra oppgave **1b** og setter inn tall: [1]

$$\underline{t_0} = \frac{Q^*}{D} \tag{8}$$

$$= \frac{10\,724\ \cancel{\text{tonn}}}{230\,000\ \frac{\cancel{\text{tonn}}}{\text{år}}} = \underline{0.0466\ \text{år}} \tag{9}$$

som skal oppgis i antall dager:

$$\underline{t_0} = 0.0466 \cdot 365\ \text{dager} = \underline{17\ \text{dager}} \tag{10}$$

altså det tar $\underline{\underline{17\ \text{dager}}}$ fra lageret er fullt til lageret er tomt.

■

[1] Man må ikke ha med benevning i mellomregningene i denne oppgaven slik som i lign.(9). Grunnen til at det likevel er tatt med i dette løsningsforslaget er bare for å vise at benevningen stemmer.

Oppgave 2: (logistikk og økonomi - utvidet EOQ-formel)

a) Optimum av kostnadsfunksjonen $K(Q)$ inntreffer når stigningstallet $= 0$:

$$\text{stigningstallet til } K(Q) \quad = \quad 0 \tag{11}$$

$$\frac{d\,K(Q)}{dQ} \quad = \quad 0 \tag{12}$$

$$\frac{d}{dQ}\left(\frac{H}{2}\Big(1-\frac{D}{P}\Big)\,Q+\frac{DS}{Q}\right) \quad = \quad 0 \tag{13}$$

$$\frac{d}{dQ}\left(\frac{H}{2}\Big(1-\frac{D}{P}\Big)\,Q+DS\,Q^{-1}\right) \quad = \quad 0 \tag{14}$$

$$\frac{H}{2}\Big(1-\frac{D}{P}\Big)+DS\,(-1)Q^{-1-1} \quad = \quad 0 \tag{15}$$

$$\frac{H}{2}\Big(1-\frac{D}{P}\Big)-\frac{DS}{Q^2} \quad = \quad 0 \tag{16}$$

$$\frac{H}{2}\Big(1-\frac{D}{P}\Big) \quad = \quad \frac{DS}{Q^2} \qquad \Big|\cdot Q^2 \tag{17}$$

$$Q^2\frac{H}{2}\Big(1-\frac{D}{P}\Big) \quad = \quad DS \qquad \Big|\cdot \frac{1}{\frac{H}{2}\big(1-\frac{D}{P}\big)} \tag{18}$$

$$Q^2 \quad = \quad \frac{2\,DS}{\cancel{2}\,\frac{H}{\cancel{2}}\big(1-\frac{D}{P}\big)} \qquad \text{“oppe-nede metoden”} \tag{19}$$

$$Q^2 \quad = \quad \frac{2DS}{H\big(1-\frac{D}{P}\big)} \tag{20}$$

Tar kvadratrot på begge sider av lign.(20) og får:

$$\underline{\underline{Q \;=\; \sqrt{\frac{2DS}{H\Big(1-\frac{D}{P}\Big)}}}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{21}$$

b) Den 1. deriverte av $K(Q)$ fant vi i oppgave **2a**, se lign.(16):

$$\underline{\frac{d\,K(Q)}{dQ}} = \frac{d}{dQ}\left(\frac{H}{2}\Big(1-\frac{D}{P}\Big)Q + DSQ^{-1} \right) = \underline{\frac{H}{2}\Big(1-\frac{D}{P}\Big) - DSQ^{-2}} \tag{22}$$

Den 2. deriverte finner vi ved å derivere en gang til:

$$\underline{\underline{\frac{d^2K(Q)}{dQ^2}}} = \frac{d}{dQ}\left(\frac{dK(Q)}{dQ}\right) \tag{23}$$

$$= \frac{d}{dQ}\left(\frac{H}{2}\Big(1-\frac{D}{P}\Big) - DSQ^{-2} \right) \tag{24}$$

$$= 0 - DS(-2)Q^{-2-1} \tag{25}$$

$$= 2DSQ^{-3} = \underline{\underline{\frac{2DS}{Q^3}}} \tag{26}$$

Siden D, S og Q alle er positive størrelser så er også $\underline{\underline{\frac{d^2K(Q)}{dQ^2} > 0}}$,

dvs. Q^* representerer et minimum for $K(Q)$.

c) Tiden t_1 er bestemt av skjæringspunktet mellom $i_g(t)$ og $i_r(t)$:

$$i_g(t_1) = i_r(t_1) \tag{27}$$

Uttrykkene for $i_g(t)$ og $i_r(t)$ er oppgitt i oppgaven.
Vi setter inn:

$$(P-D)t_1 = \tilde{Q}^* - Dt_1 \tag{28}$$

$$Pt_1 - \cancel{Dt_1} = \tilde{Q}^* - \cancel{Dt_1} \tag{29}$$

$$Pt_1 = \tilde{Q}^* \tag{30}$$

som gir

$$\underline{\underline{t_1 = \frac{\tilde{Q}^*}{P}}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{31}$$

d) Fra figuren i oppgaveteksten ser vi at: (også oppgitt i fotnoten i oppgaven)

$$t_2 = \tilde{t}_0 - t_1 \tag{32}$$

Tiden t_1 fant vi i oppgave **2c**. Vi må finne $\tilde{t}_0$.

Tiden $\tilde{t}_0$ er nullpunktet for $i_{\mathrm{r}}(t)$, dvs.:

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{r}}(\tilde{t}_0) &= 0 &(33)\\ \tilde{Q}^* - D\tilde{t}_0 &= 0 &(34)\\ \tilde{Q}^* &= D\tilde{t}_0 &(35) \end{aligned}$$

som gir

$$\underline{\tilde{t}_0 = \frac{\tilde{Q}^*}{D}} \tag{36}$$

Setter lign.(36) og (31) inn i $t_2 = \tilde{t}_0 - t_1$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{t_2}} &= \tilde{t}_0 - t_1 &(37)\\ &= \frac{\tilde{Q}^*}{D} - \frac{\tilde{Q}^*}{P} &(38)\\ &= \underline{\underline{\tilde{Q}^*\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P}\right)}} \quad , \quad \text{q.e.d.} &(39) \end{aligned}$$

hvor vi har faktorisert i den siste ligningen.

e) Siden P og D er oppgitt i år så er også t_2 i antall år:

$$\underline{t_2} = \tilde{Q}^*\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P}\right) \tag{40}$$

$$= 14\,593\left(\frac{1}{230\,000} - \frac{1}{500\,000}\right) \text{ år } = \underline{0.0343 \text{ år}} \tag{41}$$

Oppgitt i antall dager: [2]

$$\underline{\underline{t_2}} = 0.0343\ \cancel{\text{år}} \cdot 365\ \frac{\text{dager}}{\cancel{\text{år}}} = \underline{\underline{12.5 \text{ dager}}} \tag{42}$$

■

[2] Man behøver ikke ha med benevning i mellomregningen. Kun i sluttsvaret. Grunnen til at jeg likevel har med benevning i mellomregningen her i løsningsforslaget er bare for å illustrere at benevningen stemmer.

Oppgave 3: (logistikk og økonomi − følsomhetsanalyse)

a) Forholdet $K(Q^*_{\text{real}})/K(\tilde{Q}^*)$ overstiger ikke 1.05 når

$$\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \;\leq\; 1.05 \tag{43}$$

Vi får:

$$\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \quad\leq\quad 1.05 \qquad \Big|\cdot 2 \tag{44}$$

$$z + \frac{1}{z} \quad\leq\quad 2.1 \qquad \Big|\cdot z \tag{45}$$

$$z^2 + 1 \quad\leq\quad 2.1z \tag{46}$$

som gir:

$$\underline{\underline{z^2 \;-\; 2.1z \;+\; 1 \;\leq\; 0}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{47}$$

b) Dersom vi skal faktorisere en 2. gradsligning så må vi finne nullpunktene. De finnes ved å bruke ABC-formelen. I vårt tilfelle, se lign.(47), er:

$$a \;=\; 1 \qquad , \qquad b = -2.1 \qquad , \qquad c \;=\; 1 \tag{48}$$

Dermed:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} \tag{49}$$

$$z_1 = \frac{-(-2.1) - \sqrt{(-2.1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \quad , \quad z_2 = \frac{-(-2.1) + \sqrt{(-2.1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \tag{50}$$

$$z_1 = \frac{2.1 - \sqrt{0.41}}{2} \quad , \quad z_2 = \frac{2.1 + \sqrt{0.41}}{2} \tag{51}$$

$$\underline{z_1 = 0.73} \quad , \quad \underline{z_2 = 1.37} \tag{52}$$

Når vi kjenner nullpunktene så kan vi også faktorisere $z^2 - 2.1z + 1 \leq 0$:

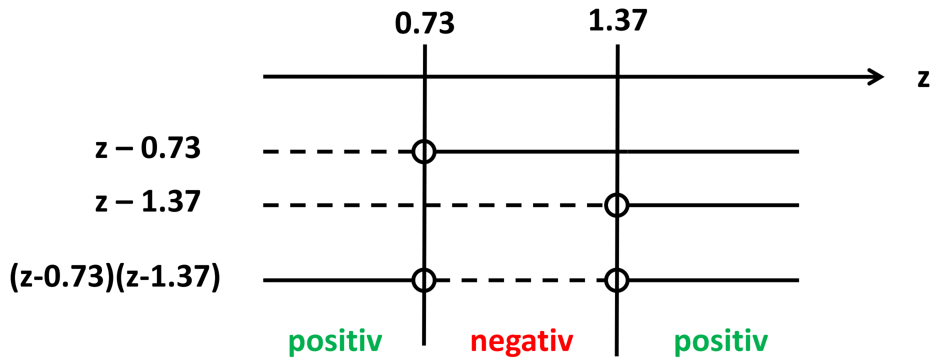
$$z^2 - 2.1z + 1 \leq 0 \tag{53}$$

$$a(z - z_1)(z - z_2) \leq 0 \tag{54}$$

$$\underline{\underline{(z - 0.73)(z - 1.37) \leq 0}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{55}$$

hvor $a = 1$ i vårt tilfelle.

c) Fortegnsskjema for $(z - 0.73)(z - 1.37)$:



Figur 1: Fortegnsskjema for $(z - 0.73)(z - 1.37)$.

Ut fra fortegnsskjemaet ser vi at $z^2 - 2.1z + 1 \leq 0$, dvs. negativ, når:

$$\underline{\underline{0.73 \ \leq \ z \ \leq 1.37}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{56}$$

d) At det virkelige optimale kvantumet Q^*_{real} er 20 % større enn $\tilde{Q}^*$ betyr:

$$z \ = \ 1.2 \tag{57}$$

Denne z-verdien ligger innenfor intervallet i lign.(56), dvs. oppfyller $0.73 \leq z \leq 1.37$, og oppfyller dermed også ulikheten

$$\frac{K(Q^*_{\text{real}})}{K(\tilde{Q}^*)} \ = \ \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \ \leq \ 1.05 \tag{58}$$

Derfor vil Norsk Hydro bomme med $\underline{\underline{\text{mindre}}}$ enn 5 % på lager- og oppstartskostnadene $K(Q)$ dersom de bruker Q^*_{real} istedet for $\tilde{Q}^*$.

■

Oppgave 4: (økonomi)

a) Strømforbruket i år 2022 er:

$$\underline{a_{12}} = b\,1.02^{12} \tag{59}$$

$$= 5\cdot 10^9 \cdot 1.02^{12} \;\text{ kWh} = \underline{6.34\cdot 10^9 \;\text{ kWh}} \tag{60}$$

Strømforbruk i 2022 er $\underline{\underline{a_{12} = 6.34 \text{ milliarder kWh}}}$.

b) Rekken $a_i = b1.02^i$ er på formen $a_{i+1} = ka_i$, hvor $k =$ en konstant ($k = 1.02$ i vårt tilfelle). Derfor er det en geometrisk rekke.

c) Summen av en geometrisk rekke er: [3]

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \tag{61}$$

For vår rekke er kvotienten $k = 1.02$ og $a_1 = b\,1.02$. Dette setter vi inn i lign.(61):

$$\underline{\underline{S_n^{\text{forbruk}}}} \overset{\text{lign.(61)}}{=} a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \tag{62}$$

$$= b\,1.02 \frac{1.02^n - 1}{1.02 - 1} = \frac{1.02}{1.02 - 1}\, b\left(1.02^n - 1\right) \tag{63}$$

$$= \underline{\underline{51\, b\left(1.02^n - 1\right)}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{64}$$

[3] Se formelsamlingen dersom du ikke husker formelen i hodet.

d) Formelen i oppgave **4c** viser det totale strømforbruket etter n år.
Derfor kan vi bruke nettopp denne formlen med $n = 10$:

$$\underline{S_{10}^{\text{forbruk}}} = 51\, b \left(1.02^{10} - 1\right) \tag{65}$$

$$= 51 \cdot 5 \cdot 10^{9} \left(1.02^{10} - 1\right) \text{ kWh} = \underline{5.58 \cdot 10^{10} \text{ kWh}} \tag{66}$$

Norsk Hydro sitt samlede strømforbruk er $\underline{\underline{S_{10}^{\text{forbruk}} = 55.8 \text{ milliarder kWh}}}$.

e) Renten R_n^{serie} som Norsk Hydro må betale med en nedbetalingstid på $n = 20$ år er:

$$\underline{R_{20}^{\text{serie}}} = K_0 r \, \frac{n+1}{2} \tag{67}$$

$$= 250 \cdot 10^{6} \cdot 0.028 \, \frac{20+1}{2} \text{ NOK} = \underline{7.35 \cdot 10^{7} \text{ NOK}} \tag{68}$$

Renten som Norsk Hydro må betale er $\underline{\underline{R_{20}^{\text{serie}} = 73.5 \text{ millioner NOK}}}$.

f) Norsk Hydro har spart inn investeringskostnadene K_0 og rentekostnaden R_{20}^{serie} som et resultat av reduserte strømkostnader ΔK_n når:

$$\Delta K_n = R_{20}^{\text{serie}} + K_0 \tag{69}$$

Setter inn uttrykkene for ΔK_n og S_n^{forbruk} på venste side:

$$
\begin{aligned}
0.1\,p\,S_n^{\text{forbruk}} &= K_0 + R_{20}^{\text{serie}} && (70)\\
0.1\,p\,51b\big(1.02^n - 1\big) &= K_0 + R_{20}^{\text{serie}} \qquad \Big|\cdot \frac{1}{0.1\,p\,51\,b} && (71)\\
1.02^n - 1 &= \frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{0.1\,p\,51\,b} && (72)\\
1.02^n &= \frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1\,p\,b} + 1 && (73)
\end{aligned}
$$

siden $0.1 \cdot 51 = 5.1$.

For å "jekke ned" eksponenten "n" så tar vi "ln" på begge sider av ligningen:

$$
\begin{aligned}
\ln\big(1.02^n\big) &= \ln\left(\frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1\,p\,b} + 1\right) && (74)\\
n\ln 1.02 &= \ln\left(\frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1\,p\,b} + 1\right) && (75)
\end{aligned}
$$

hvor vi har brukt regneregelen $\ln a^{n} = n \ln a$.
Dermed: ved å dele på "$\ln 1.02$" på begge sider at lign.(75) så får vi:

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln\left(\frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1\,p\,b} + 1\right)}{\ln 1.02}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{76}$$

$\blacksquare$