

Oppgave 4: (Lagrange multiplikator)

- a) Dette er et minimeringsproblem under en **bibetingelse**. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Bibetingelsen er:

$$g(x, y) = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} = 360 \quad (34)$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\boxed{F(x, y) = u(x, y) - \lambda [g(x, y) - c]} \quad (35)$$

hvor $c = 360$ og $u(x, y) = 320x + 360y$. De **stasjonære punktene** til $F(x, y)$ er:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (320x + 360y) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}) = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (320x + 360y) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}) = 0 \quad (39)$$

$$320 - \lambda \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \quad (40)$$

$$360 - \lambda \frac{3}{\sqrt{y}} = 0 \quad (41)$$

$$160\sqrt{x} = \lambda \quad (42)$$

$$120\sqrt{y} = \lambda \quad (43)$$

De to ligningene i lign.(42) og (43) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsetningsmetoden”⁶. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(42) og (43):

$$\lambda = \lambda \quad (44)$$

$$160\sqrt{x} = 120\sqrt{y} \quad (45)$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{x} = \sqrt{y} \quad (46)$$

og den uinteressante størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(46) inn i bibetingelsen:

$$4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} = 360 \quad (47)$$

$$4\sqrt{x} + 6\frac{4}{3}\sqrt{x} = 360 \quad (48)$$

$$12\sqrt{x} = 360 \quad (49)$$

$$\underline{x = 900} \quad (50)$$

som gir, f.eks. via lign.(46), $\underline{y} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 x = \left(\frac{4}{3}\right)^2 900 = \underline{1600}$.

Minimum for utgiften $u(x, y)$ inntreffer altså for punktet $(x, y) = (900, 1600)$.

For å minimere utgiften $u_{\min}$ bør Glamox bruke:

$$\underline{\underline{x = 900}} \quad \text{antall timer i produksjonen av “lux light” ved fabrikken i USA} \quad (51)$$

$$\underline{\underline{y = 1600}} \quad \text{antall timer i produksjon av “lux light” ved fabrikken i Molde} \quad (52)$$

når de skal produsere 360 “lux light” lamper.

⁶Med “innsetningsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

b) I oppgave **a** fant vi at $x = 900$ og $y = 1600$ vil minimere utgiften. Derfor:

$$\underline{u_{\min}} = u(900, 1600) \tag{53}$$

$$= (320 \cdot 900 + 360 \cdot 1600) \text{ NOK} = \underline{864\,000 \text{ NOK}} \tag{54}$$

Den minimale utgiften til Glamox er 864 000 NOK.

■