Høgskolen i Molde

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	**:**	**Torsdag 17. desember 2015**
Tid	**:**	**09:00 – 13:00 (4 timer)**
Faglærer/telefonnummer	**:**	**Molde:** **Per Kristian Rekdal / 924 97 051** **Kristiansund:** **Terje Bach / 932 55 838**
Hjelpemidler	**:**	**KD + formelsamling**
Antall sider inkl. forsiden	**:**	**11 + vedlegg (1 side)**
Målform	**:**	**Norsk (bokmål)**

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.**
- **Det er totalt 4 oppgaver. Dvs. i *gjennomsnitt* èn time per oppgave.**

Oppgave 1: (økonomi)

La oss se på en bedrift som produserer et produkt. Anta at det totale resultatet $TR(x)$ som bedriften får ved å produsere x antall enheter er et bestemt produkt, kan beskrives av funksjonen

$$\boxed{TR(x) = I(x) - K(x) \qquad (1)}$$

hvor

$$
\begin{aligned}
TR(x) &= \text{totalt resultat} && (2)\\
I(x) &= \text{total inntekt} && (3)\\
K(x) &= \text{total kostnad} && (4)\\
x &= \text{antall enheter produsert av produktet} && (5)
\end{aligned}
$$

Innen økonomi defineres grenseinntekt og grensekostnad som den **deriverte** av henholdsvis inntekts- og kostandsfunksjonen:

$$\text{grenseinntekt} \overset{\text{def.}}{=} \frac{dI(x)}{dx} \qquad (6)$$

$$\text{grensekostnad} \overset{\text{def.}}{=} \frac{dK(x)}{dx} \qquad (7)$$

a) Vis at **maksimalt resultat** TR_{max} oppnås når: [1]

$$\boxed{\text{grenseinntekt} = \text{grensekostnad} \qquad (8)}$$

b) Gi en *kort* generell tolkning av grensekostnaden i et økonomisk perspektiv. [2]

[1] Denne oppgaven krever lite regning. I tillegg, anta at $\frac{d^2TR(x)}{dx^2} < 0$ for $x > 0$, dvs. $TR(x)$ er konkav slik at lign.(8) representerer en betingelse for *maksimum* av $TR(x)$, ikke et minimum. Dermed behøver du heller ikke å utføre 1. derivasjonstesten eller 2. derivasjonstesten.

[2] Tips: Se formelsamling, kapittel 3.

Ello i Kristiansund produserer blant annet vaskemidler, såpeprodukter samt produkter for personlig pleie. Eksempler på dette er merkevarer som *Blenda*, *Lano* og *Solidox*.

Basert på erfaring viser det seg at kostnadsfunksjonen $K(x)$ per måned for en gitt type såpe er:

$$K(x) = ax^2 + bx + c \tag{9}$$

hvor $x =$ antall liter såpe produsert en bestemt måned, og a, b og c er konstanter.

Anta at prisen som Ello får for sitt såpeprodukt er p NOK/liter. Inntekten per måned for dette produktet dersom det selges x antall liter såpe per måned er:

$$I(x) = p \cdot x \tag{10}$$

c) Vis at det **totale resultatet** $TR(x)$ per måned for Ello er gitt ved:

$$\boxed{TR(x) = (p-b)x - ax^2 - c \qquad (11)}$$

d) Vis at antall liter såpe som må produseres en bestemt måned for å **maksimere** resultatet $TR(x)$ er gitt ved:

$$\boxed{x_{max} = \frac{p-b}{2a} \qquad (12)}$$

Figur 1: Ello i Kristiansund.

e) Begrunn ved en *kort* regning hvorfor lign.(12) representerer et maksimum og ikke et minimum av $TR(x)$. Anta at konstanten a er positiv. [3]

f) Vis at det **maksimale** totale resultatet $TR_{max} \equiv TR(x_{max})$ er gitt ved:

$$\boxed{TR_{max} = \frac{(p-b)^2}{4a} - c \qquad (13)}$$

For en bestemt type såpe er kostantene a, b og c gitt ved:

$$a = 0.001 \; \frac{\text{NOK}}{\text{liter}^2} \qquad (14)$$

$$b = 10 \; \frac{\text{NOK}}{\text{liter}} \qquad (15)$$

$$c = 3\,000 \;\; \text{NOK} \qquad \text{(faste kostnader)} \qquad (16)$$

Anta at prisen som Ello får for sitt såpeprodukt er $p = 22$ NOK/liter.

g) Hvor mange liter såpe må Ello produsere per måned for å maksimere det totalte reslutatet $TR(x)$?

h) Hva er det maksimale resultatet TR_{max} som Ello kan oppnå per måned? [4]

■

[3] Tips: 2. derivasjonstesten.

[4] Her er vi på jakt etter tallverdien for TR_{max}.

Oppgave 2: (finansmatematikk)

Innen finansmatematikk er det mange formler. To viktige formler i den sammenheng som vi har lært om i "*MAT100 Matematikk*" er:

$$\boxed{S_n^{\text{ann}} = K(1+r)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad (17)}$$

og

$$\boxed{K_0 = K\,\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \qquad (18)}$$

a) Forklart *kort* hva disse formlene beskriver.
Hva slags restriksjon**er** må man ha på renten r for at formlene skal gjelde?

b) Ta utgangspunkt i lign.(17) og vis at denne ligningen kan løses med hensyn på K alene og skrives på følgende form:

$$K = \frac{rS_n^{\text{ann}}}{(1+r)\Big[(1+r)^n - 1\Big]} \qquad (19)$$

Figur 2: Sparing.

c) Anta at du trenger 100 000 NOK om 4 år.
Du bestemmer deg for å sette av et *månedlig* beløp på K kroner de neste 4 årene.
Anta videre at renten er 4.5 % per år, dvs. den *månedlige* renten er:

$$r = \frac{0.045}{12} = 0.00375 \tag{20}$$

I løpet av 4 år er det

$$n = 12 \cdot 4 = 48 \tag{21}$$

månedlige terminer.

Hvor stort beløp K må du sette av i måneden for å få $S_n^{\mathrm{ann}} = 100\,000$ NOK etter 4 år,
èn termin etter at siste beløp er satt av?

d) Ta utgangspunkt i lign.(17) og vis at denne ligningen kan løses med hensyn på n
og skrives på følgende form:

$$n \;=\; \frac{\ln\left(\frac{rS_n^{\mathrm{ann}}}{K(1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)} \tag{22}$$

e) Anta istedet at renten er 6 %, dvs. den månedlige renten er:

$$r = \frac{0.06}{12} = 0.005 \tag{23}$$

Anta videre at du setter av det samme månedlige beløpet K som du fant i oppgave **2c**.

Hvor mange måneder må du nå spare for å få 100 000 NOK,
èn termin etter at siste beløp er satt av?

■

Oppgave 3: (priselastisitet og logistikk)

I denne oppgaven skal vi se på *priselastisiteten* til et produkt.
Vi skal studere etterspørselen sin følsomhet for endring i prisen på produktet. *Priselastisiteten* kan skrives på følgende halvmatematiske form:

$$E_p(x) \quad = \quad \frac{\text{\%-vis endring i etterspørselen}}{\text{\%-vis endring i prisen}} \tag{24}$$

Matematisk er denne *pris*elastisiteten gitt ved:

$$\boxed{E_p(x) \quad = \quad \frac{d\,x(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \qquad (25)}$$

hvor

$$x(p) \quad = \quad \text{etterspørselen av produktet} \tag{26}$$
$$p \quad = \quad \text{prisen på produktet} \tag{27}$$

Denne priselastisiteten $E_p(x)$ kan deles inn i 3 kategorier. Disse tre kategoriene er:

Uelastisk:	etterspørselen er **lite** følsom for prisendring.
Nøytralelastisk:	etterspørselen har **samme** følsomhet som prisen.
Elastisk:	etterspørselen er **følsom** for prisendring.

I vedlegget helt bakerst i denne eksamensoppgaven (1 side) finner en figur med en tallinje. På forskjellige plasser i denne tallinjen er det 3 bokser. I disse 3 boksene skal du skrive inn de 3 kommentarene nevnt ovenfor.

a) Fyll ut boksene i vedlegget med de 3 kommentarene ovenfor.

b) Deler av den røde linjen i vedlegget er stiplet, for $E_p(x) > 0$.
Hva betyr det at $E_p(x) > 0$? Gi en *kort* tolkning. [5]

[5] En kort begrunnelse på èn linje er nok.

Maersk er verdens største containerskipsoperatør. Anta at for en av rutene til Maersk mellom Norge og USA så kan sammenhengen mellom etterspørselen av antall containere som skal fraktes på denne ruten per måned, og prisen p per container for transporten, gitt ved:

$$\boxed{x(p) \; = \; 300 - p^2 \qquad (28)}$$

hvor

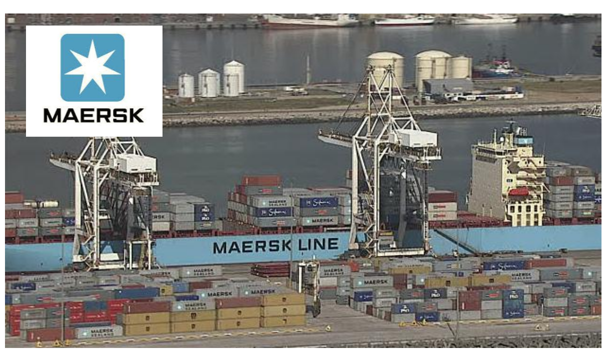
$$
\begin{aligned}
x(p) \; &= \; \text{etterspørsel av antall containere som skal transporteres} && (29)\\
& \; \text{fra Norge til USA i måneden} && (30)\\
p \; &= \; \text{pris per container for transport mellom Norge og USA}\\
& \; \text{i 1000 NOK} && (31)
\end{aligned}
$$

c) Vis at priselastisiteten for den aktuelle ruten er gitt ved:

$$E_p(x) \; = \; -\frac{2p^2}{300 - p^2} \tag{32}$$

d) Hvor stor er priselastisiteten når $p = 5$?

e) Tolk resultatet i oppgave **3d**.



Figur 3: Maersk.

f) Bruk svaret fra oppgave **3d** til å finne hvor mye den %-vise etterspørselen vil endre seg dersom prisen på containertransporten øker med 5 %. [6]

g) Hva slags pris p må Maersk sette for at priselastisiteten skal være nøytralelastisk?

■

Figur 4: Maersk.

[6] Bruk gjerne lign.(24). Du skal finne "%-vis endring i etterspørselen" når du vet at:

$$\text{\%-vis endring i prisen} \;=\; 5\ \% \tag{33}$$

Dette betyr at du vet nevneren i lign.(24). Og du skal finne telleren.

Oppgave 4: (logistikk og lagerkostnader)

Hustadmarmor AS i Elnesvågen er en bedrift som leverer "*slurry*" til industrien. Slurry er en hvit flytende masse som blant annet brukes til bleking av papir (se figur 5).

Det finnes to typer slurry, type 1 og type 2. Disse to typene slurry kan lagres i samme tank siden en tank kan deles to. Med variablene

$$x_1 \;=\; \text{antall tonn slurry av type 1 som lagres i en tank} \qquad (\text{ i 1000 tonn }) \tag{34}$$
$$x_2 \;=\; \text{antall tonn slurry av type 2 som lagres i en tank} \qquad (\text{ i 1000 tonn }) \tag{35}$$

og siden en tank har en kapasitet på 100 000 tonn, så har vi betingelsen:

$$g(x_1, x_2) \;=\; x_1 + x_2 \;=\; 100 \tag{36}$$

Anta at lagerkostnadene per uke forbundet med å lagre slurry av type 1 og 2 er henholdsvis: (i NOK)

$$C_1(x_1) \;=\; x_1^2 + 400x_1 \tag{37}$$
$$C_2(x_2) \;=\; x_2^2 + 300x_2 \tag{38}$$

Den totale lagerkostnaden per uke, $C(x_1, x_2) = C_1(x_1) + C_2(x_2)$, er dermed: (i NOK)

$$C(x_1, x_2) \;=\; x_1^2 + 400x_1 \;+\; x_2^2 + 300x_2 \tag{39}$$

I tillegg må selvsagt størrelsene x_1 og x_2 være positive, dvs. $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$.

Figur 5: Hustadmarmor. Slurry.

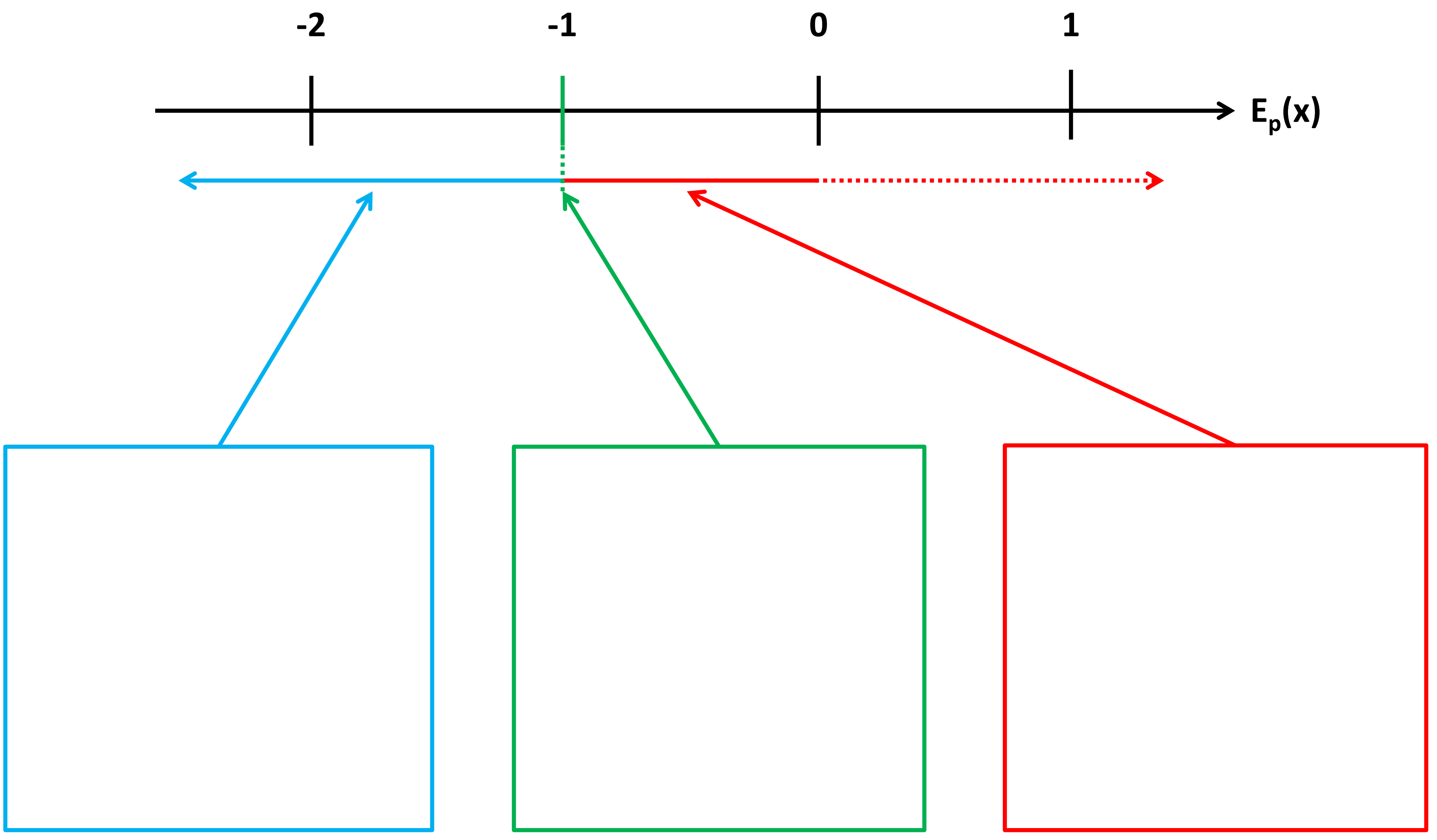
a) Hustadmarmor ønsker å *minimere* den totale lagerkostanden $C(x_1, x_2)$.
Bruk Lagrange multiplikator metoden til å finne den x_1 og den x_2
som gir *minst* total lagerkostnad $C(x_1, x_2)$. [7]

b) Hva er den minste samlede lagerkostnaden $C_{\min}$ for Hustadmarmor
i denne sammenheng?

■

[7] For å være helt sikre på at man finner minimum av lign.(39), og ikke et maksimum, må man gjøre mer analyse. Men en slik analyse behøver du *ikke* å gjøre her. Du trenger heller *ikke* å sjekke randen.

Vedlegg: **Kandidatnummer:** ____________________



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).