LØSNING: Eksamen 17. des. 2015

"*MAT100 Matematikk*", 2015

Oppgave 1: (økonomi)

a) I optimum av $TR(x)$ er

$$\frac{dTR(x)}{dx} = 0 \tag{1}$$

som gir

$$\frac{d}{dx}\Big(I(x) - K(x) \Big) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{dI(x)}{dx} - \frac{dK(x)}{dx} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{dK(x)}{dx} \tag{4}$$

dvs.

$$\underline{\underline{\text{grenseinntekt} = \text{grensekostnad}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{5}$$

b) <u>Grensekostand = ekstrakostnaden ved å produsere en ekstra enhet</u> [1]

[1] Tilsarende gjelder også for grenseinntekt. (Men det trenger man ikke nevne på eksamen).

c) Det **totale resultatet** $TR(x)$ for Ello er gitt ved:

$$\underline{\underline{TR(x)}} \stackrel{\text{def.}}{=} I(x) - K(x) \tag{6}$$

$$= p \cdot x - K(x) \tag{7}$$

$$= p \cdot x - \Big(ax^2 + bx + c \Big) \tag{8}$$

$$= p \cdot x - ax^2 - bx - c \tag{9}$$

$$= \underline{\underline{(p-b)x - ax^2 - c}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{10}$$

d) Det totale resultatet $TR(x)$ oppnår sitt **optimum**, i dette tilfellet maksimum, når den deriverte er lik null:

$$\text{stigningstallet} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{d\,TR(x)}{dx} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\Big((p-b)x - ax^2 - c \Big) = 0 \tag{13}$$

$$(p-b) - a2x = 0 \tag{14}$$

$$(p-b) = a2x \tag{15}$$

$$\underline{\underline{x_{max} = \frac{p-b}{2a}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{16}$$

e) Den 2. deriverte av $TR(x)$: [2]

$$\underline{\frac{d^2TR(x)}{dx^2}} = \frac{d^2}{dx^2}\Big((p-b)x - ax^2 - c \Big) \tag{17}$$

$$= \frac{d}{dx}\Big((p-b) - 2ax \Big) \tag{18}$$

$$= \underline{-2a} \tag{19}$$

er negativ siden $a > 0$. Dermed er $TR(x)$ konkav og betingelsen i lign.(5) representerer et maksimum og ikke et minimum av $TR(x)$.

f) Det **maksimale** totale resultatet $TR_{max} \equiv TR(x_{max})$ er:

$$\underline{\underline{TR_{max}}} = TR(x_{max}) \tag{20}$$

$$= (p-b)x_{max} - ax_{max}^2 - c \tag{21}$$

$$= (p-b)\,\frac{p-b}{2a} - a\left(\frac{p-b}{2a}\right)^2 - c \tag{22}$$

$$= \frac{(p-b)^2}{2a} - \frac{(p-b)^2}{4a} - c \tag{23}$$

$$= \underline{\underline{\frac{(p-b)^2}{4a} - c}} \tag{24}$$

[2] 2. derivasjonstesten. Se formelsamlingen.

g) Antall liter såpe må Ello produsere per måned for å maksimere $TR(x)$:

$$\underline{\underline{x_{max}}} \overset{\text{lign.(16)}}{=} \frac{p-b}{2a} \tag{25}$$

$$= \frac{(\,22-10\,)\,\cancel{\frac{\text{NOK}}{\text{liter}}}}{2\cdot 0.001\,\frac{\cancel{\text{NOK}}}{\text{liter}^{\cancel{2}}}} = \underline{\underline{6\,000 \text{ liter}}} \tag{26}$$

h) Maksimalt resultat TR_{max} som Ello kan oppnå per måned:

$$\underline{\underline{TR_{max}}} \overset{\text{lign.(24)}}{=} \frac{(p-b)^2}{4a} - c \tag{27}$$

$$= \left(\frac{(\,22-10\,)^2}{4\cdot 0.001} - 3\,000 \right) \text{NOK} = \underline{\underline{33\,000 \text{ NOK}}} \tag{28}$$

■

Oppgave 2: (finansmatematikk)

a) Formel S_n^{ann}:

Formelen S_n^{ann} beskriver summen av oppspart kapital når man setter av samme kapitalen K ved begynnelsen av hver termin i n antall terminer.
Summen S_n^{ann} er da oppspart beløp èn termin etter siste termin n.

Formel K_0:

K_0 beskriver den nåverdien man må ha dersom man skal ta ut/betale tilbake samme beløp K i n terminer fremover.

Begge formlene gjelder kun dersom renten r er konstant over alle n terminene.
I tillegg må selvsagt også renten være positiv $r > 0$, dvs. man kan ikke ha $r = 0$.

b) Formelen for S_n^{ann} var oppgitt i oppgaven:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{29}$$

Løser med hensyn på K alene:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{(1+r)} \tag{30}$$

$$\frac{S_n^{\text{ann}}}{(1+r)} = K\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad \Big| \cdot r \tag{31}$$

$$\frac{rS_n^{\text{ann}}}{(1+r)} = K\Big[(1+r)^n - 1\Big] \qquad \Big| \cdot \frac{1}{(1+r)^n - 1} \tag{32}$$

som gir:

$$\underline{\underline{K = \frac{rS_n^{\text{ann}}}{(1+r)\Big[(1+r)^n - 1\Big]}}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{33}$$

c) Oppgaven dreier seg om **oppsparingannuitet**.

Dersom man ønsker å spare til $S_n^{\text{ann}} = 100\,000$ NOK etter 4 år,
èn termin etter at siste beløp er satt av, så er det bare å bruke formlen fra oppgave **2b** når man skal finne det månedelige beløpet K man må sette av:

$$\underline{K} = \frac{rS_n^{\text{ann}}}{(1+r)\Big[(1+r)^n - 1\Big]} \tag{34}$$

$$= \frac{0.00375 \cdot 100\,000}{(1+0.00375)\Big[(1+0.00375)^{48} - 1\Big]} \text{ NOK} \tag{35}$$

$$= \underline{1898.23 \text{ NOK}} \tag{36}$$

Du må sette av $\underline{\underline{K = 1898.23 \text{ NOK}}}$ per måned for å få 100 000 NOK etter 4 år.

d) Formelen for S_n^{ann} var oppgitt i oppgaven:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{37}$$

Løser med hensyn på n alene:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad \Bigg| \cdot \frac{1}{K(1+r)} \tag{38}$$

$$\frac{S_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} = \frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad \Bigg| \cdot r \tag{39}$$

$$\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} = (1+r)^n - 1 \qquad \text{flytter “1” på andre siden} \tag{40}$$

$$\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1 = (1+r)^n \tag{41}$$

Ta logaritmen ln på begge sider av forrige ligning. Da får man:

$$\ln(1+r)^n = \ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right) \tag{42}$$

$$n \cdot \ln(1+r) = \ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{\ln(1+r)} \tag{43}$$

som gir:

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{44}$$

e) Også denne oppgaven dreier seg om **oppsparingannuitet**.
Vi finne hvor mange måneder vi må sette av beløpet fra oppgave **2c**, dvs.

$$K = 1898.23 \ \text{ NOK} \tag{45}$$

for å oppnå samme totale oppsparte beløp, $S_n^{\text{ann}} = 100\,000$ NOK, èn måned etter at siste beløp er satt av, når renten har økt til:

$$r = \frac{0.06}{12} = 0.005 \tag{46}$$

Antall måneder vi må spare:

$$\underline{n} = \frac{\ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)} \tag{47}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{0.005 \cdot 100\,000}{1898.23(1+0.005)} + 1\right)}{\ln(1+0.005)} = 46.7 \approx \underline{47} \tag{48}$$

Det tar altså $\underline{\underline{n = 47 \text{ måneder}}}$, dvs. kun èn måned kortere tid dersom renten økes til 6 % i året.

■

Oppgave 3: (priselastisitet og logistikk)

a) Se vedlegg A.

b) At $E_p(x) > 0$ betyr at en prisøkning vil gi en <u>økning av etterspørsel</u>. [3]

c) Priselastisiteten $E_p(x)$:

$$\underline{\underline{E_p(x)}} = \frac{d\,x(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \tag{49}$$

$$= \frac{d}{dp}\left(c - p^2 \right) \cdot \frac{p}{c - p^2} \tag{50}$$

$$= \left(-2p \right) \cdot \frac{p}{c - p^2} \tag{51}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2p^2}{300 - p^2}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{52}$$

d) Når prisen er $p = 5$ så er tilhørende priselastisitet:

$$\underline{\underline{E_p(x)}} = -\frac{2p^2}{300 - p^2} \tag{53}$$

$$= -\frac{2 \cdot 5^2}{300 - 5^2} = -\frac{2}{11} = \underline{\underline{-0.18}} \tag{54}$$

[3] Det er svært sjelden at et marked har denne typen dynamikk. For noen luksusvarer kan det mulignes være slik. (Men dette trenger man ikke nevne på eksamen).

e) Tolking:

Dersom prisen p på containertransport øker med 1 % så vil etterspørselen minke med 0.18 %.

(Altså "reduksjonsfaktoren" er 0.18.)

f) Siden

$$E_p(x) \;=\; \frac{\text{\%-vis endring i etterspørsel}}{\text{\%-vis endring i pris}} \tag{55}$$

så ser vi at:

$$\underline{\underline{\text{\%-vis endring i etterspørsel}}} \;=\; \underbrace{E_p(t)}_{=\,-0.18} \cdot \underbrace{\text{\%-vis endring i inntekt}}_{=\,5\ \%} \tag{56}$$

$$= \;-0.18 \cdot 5\ \% \tag{57}$$

$$= \;\underline{\underline{-0.9\ \%}} \tag{58}$$

g) Priselastisiteten er nøytralelastisk når:

$$E_p(x) = -1 \tag{59}$$

Priselastisiteten $E_p(x)$ er gitt ved lign.(52).
Dermed kan vi løse med hensyn på p alene:

$$-\frac{2p^2}{300-p^2} \;=\; -1 \tag{60}$$

$$\frac{2p^2}{300-p^2} \;=\; 1 \qquad \Big| \cdot (300-p^2) \tag{61}$$

$$2p^2 = 300 - p^2 \tag{62}$$

$$3p^2 = 300 \tag{63}$$

$$p^2 = 100 \tag{64}$$

som gir

$$\underline{p = 10} \tag{65}$$

siden prisen ikke kan være negativ.

Priselastisiteten er nøytralelastisk, dvs. $E_p(x) = -1$, dersom prisen er $\underline{\underline{10\,000 \text{ NOK}}}$ per container for transport mellom Norge og USA.

$\blacksquare$

Oppgave 4: (logistikk og lagerkostnader)

a) Dette er et minimeringsproblem under en bibetingelse. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Av åpenbare grunner er $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$. Dessuten er bibetingelsen:

$$g(x_1, x_2) \;=\; x_1 + x_2 \;=\; 100 \tag{66}$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\boxed{F(x_1, y_1) \;=\; C(x_1, x_2) \;-\; \lambda\, g(x_1, x_2) \qquad (67)}$$

hvor $C(x_1, x_2) = x_1^2 + 400x_1 \;+\; x_2^2 + 300x_2$. De stasjonære punktene til $F(x_1, x_2)$ er:

$$\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} \;=\; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} \;=\; 0 \tag{68}$$

$$\frac{\partial C(x, x_2)}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} \;=\; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial C(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} \;=\; 0 \tag{69}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + 400x_1 \;+\; x_2^2 + 300x_2\right) \;-\; \lambda \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 + x_2\right) \;=\; 0 \tag{70}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^2 + 400x_1 \;+\; x_2^2 + 300x_2\right) \;-\; \lambda \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1 + x_2\right) \;=\; 0 \tag{71}$$

$$2x_1 + 400 \;-\; \lambda \;=\; 0 \tag{72}$$

$$2x_2 + 300 \;-\; \lambda \;=\; 0 \tag{73}$$

$$2x_1 + 400 \;=\; \lambda \tag{74}$$

$$2x_2 + 300 \;=\; \lambda \tag{75}$$

De to ligningene i lign.(74) og (75) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x, y og λ. Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt ("entydig") løsning. Vi kan nå bruke "innsettingsmetoden" [4] og eliminere λ via lign.(74) og (75):

$$\lambda = \lambda \tag{76}$$

$$2x_1 + 400 = 2x_2 + 300 \tag{77}$$

$$2x_1 = 2x_2 - 100 \tag{78}$$

$$x_1 = x_2 - 50 \tag{79}$$

Deretter setter lign.(79) inn i bibetingelsen:

$$x_1 + x_2 = 100 \tag{80}$$

$$x_2 - 50 + x_2 = 100 \tag{81}$$

$$2x_2 = 150 \tag{82}$$

$$\underline{x_2 = 75} \tag{83}$$

som gir, f.eks. via lign.(79), $\underline{x_1} = x_2 - 50 = 75 - 50 = \underline{25}$.

Minimal lagerkostand for $C(x_1, x_2)$ inntreffer altså for $(x_1, x_2) = (25, 75)$.
For å minimere lagerutgiften C_{min} bør Hustadmarmor:

$\underline{\underline{x_1 = 25}}$ **tusen** tonn av type 1 slurry i tanken (84)

$\underline{\underline{x_2 = 75}}$ **tusen** tonn av type 2 slurry i tanken (85)

[4]Med "innsettingsmetoden" mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

b) I oppgave **4a** fant vi at $x_1 = 25$ og $x_2 = 75$ vil minimere kostnaden $C(x_1, x_2)$.
Derfor:

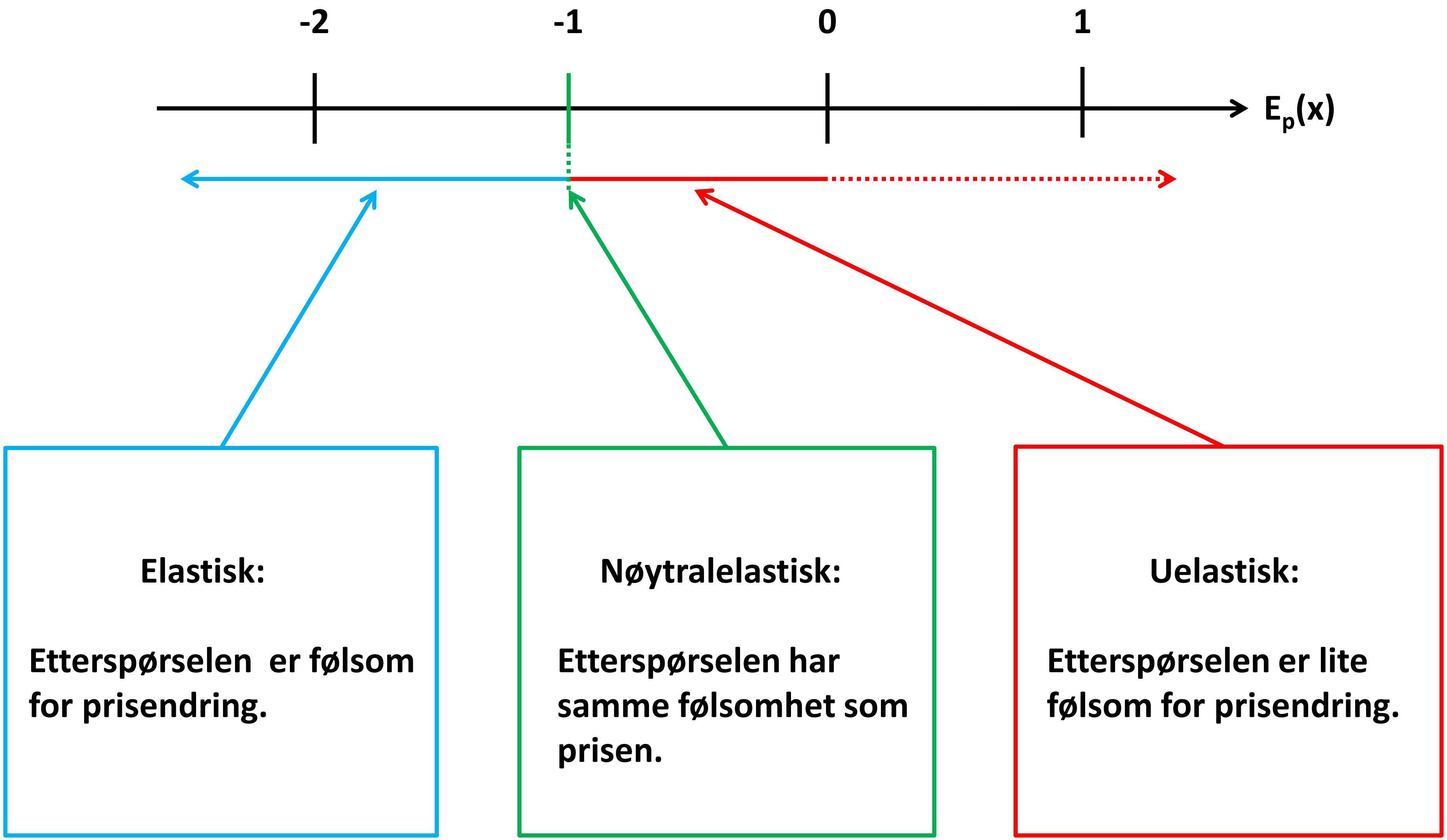
$$\underline{C_{\text{min}}} = C(25, 75) \tag{86}$$

$$= \Big(25^2 + 400 \cdot 25 \ + \ 75^2 + 300 \cdot 75\Big) \text{ NOK} \ = \ \underline{38\,750 \ \ \text{NOK}} \tag{87}$$

Den minimale lagerkostnaden per uke for Hustadmarmor er $\underline{\underline{38\,750 \ \ \text{NOK}}}$.

■

Vedlegg: **Kandidatnummer:** ________________



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).