Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Avdeling for logistikk

Eksamen i

MAT100/MAT100N Matematikk

Høst 2023

Eksamensdag:	**Mandag 18. des. 2023**
Tid:	**09:00–14:00**
Faglærer/tlf nr:	**Per Kristian Rekdal / 924 97 051**
Hjelpemidler:	**PC tillatt med internett + alle skrevne og trykte hjelpemidler**
Antall sider inkl.forsiden:	**12**
Målform:	**Bokmål**

Vanskelighetsgrad	Andel oppgaver	Beskrivelse
🧠	40.0%	Jeg er fornøyd med å stå, *E* eller *D*.
🧠🧠	40.0%	Jeg er fornøyd med å være «midt på treet», dvs. *C*.
🧠🧠🧠	20.0%	Jeg tar sikte på en toppkarakter, *A* eller *B*.
🧠 + 🧠🧠 + 🧠🧠🧠	100.0%	

Karakterskala:

$$\begin{aligned} 100\% - 90\% &\rightarrow A \\ 80\% - 89\% &\rightarrow B \\ 60\% - 79\% &\rightarrow C \\ 50\% - 59\% &\rightarrow D \\ 40\% - 49\% &\rightarrow E \\ 0\% - 39\% &\rightarrow F \text{ (stryk)} \end{aligned}$$

Tid 5t: Tiden som står på hver deloppgave er kun forventet tidforbruk. Det er altså kun et estimat, og kan variere fra person til person. Det går helt fint å bruke litt mer eller litt mindre tid enn dette estimatet.

Fusk: Det er ikke lov å samarbeide med andre når man har hjemmeksamen.

Oppgave 1 Haltenbanken

10.0%
5.0%
10.0%
25.0%
1t 15′

Draugen er en borerigg utenfor kysten til Midt-Norge.


Figur 1: Draugen. Tanking.

Oljen fra Draugen ligger på havbunnen. Når et tankskip skal hente olje, pumpes oljen fra havbunnen som vist i figur 1.

Dersom bølgehøyden er over en viss kritisk høyde k, kan ikke tankskipet pumpe inn olje. Skipet blir da liggende og vente til bølgehøyden komme under den kritiske høyden k.

Når tankskipet ligger og venter, taper oljeselskapet mye penger.

For å unngå å sende tankskip til Draugen i de tidspunkt hvor bølgene er for høye, fremskaffer oljeselskapene prognoser for bølgehøyden $h(t)$ for et visst antall dager frem i tid.

Anta at prognosene for den typiske bølgehøyden $h(t)$ for de neste 7 dagene er gitt ved 6. gradspolynomet:

$$h(t) = -0.10t^6 + 2.02t^5 - 15.085t^4 + 50.71t^3 - 73.735t^2 + 36.19t + 4 \tag{1.1}$$

for tiden $0 \leq t \leq 7$.

a) Tegn opp polynomet i lign.(1.1) ved hjelp av GeoGebra.

5%
15.0′

Tegn slik at verdiene til t typisk ligger mellom 0 og 7, og at $h(t)$ typisk ligger mellom 0 og 20. [1]

Anta at den kritiske bølgehøyden er

$$k = 8 \text{ meter} \tag{1.2}$$

[1] Det er i orden at du tegner av figuren fra GeoGebra «for hånd» på arket ditt. Alternativt kan du bruke chatGPT eller Wolfram for å tegne polynomet. Velg det programmet du liker best.

b) Les av på grafen de tidsintervallene mellom $0 \leq t \leq 7$ hvor tankskipet ikke kan pumpe olje pga. for stor bølgehøyde. [2]

5%
15.0′

Vi skal nå finne de samme tidsintervallene fra oppgave **1b** en gang til, men denne gangen ved regning via fundamentalsetningen for algebra samt fortegnsskjema.

Bølgehøyden $h(t)$ når den kritiske verdien $k = 8$ meter totalt 6 ganger innenfor intervallet $0 \leq t \leq 7$. Kall disse tidspunktene $c_1, \ldots, c_6$.

c) Bruk GeoGebra-figuren fra oppgave **1a** og finn tidspunktene $c_1, \ldots, c_6$. [3]

5%
15.0′

Ifølge fundamentalsetningen for algebra kan polynomet $h(t) - k$ skrives

$$\begin{aligned} h(t) - k &= -0.10t^6 + 2.02t^5 - 15.085t^4 + 50.71t^3 - 73.735t^2 + 36.19t + 4 - k \\ &= -0.10(t - c_1)(t - c_2)(t - c_3)(t - c_4)(t - c_5)(t - c_6) \end{aligned} \tag{1.3}$$

hvor $c_1, \ldots, c_6$ er nullpunktene til polynomet $h(t) - k$ som vi fant i oppgave **1c**.

d) Bruk lign.(1.3) og sett opp fortegnsskjema for $h(t) - k$.

10%
30.0′

Basert på dette fortegnsskjemaet, finn de tidsintervallene hvor tankskipet ikke kan pumpe olje pga. for stor bølgehøyde.

Fikk du samme svar som i oppgave **1b**?

[2] Ingen utregninger behøves. Legg inn linjen $y = 8$ og les av fra GeoGebra. To desimaler er nok.

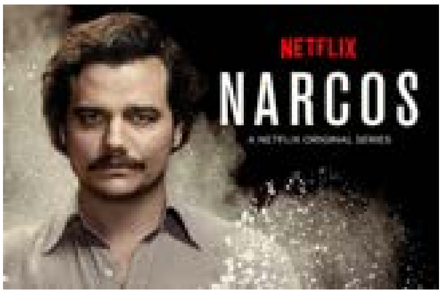
[3] Ingen utregninger behøves. Bare finn tallverdiene for $c_1, \ldots, c_6$ via GeoGebra og skriv dem ned. To desimaler er nok. Ingen ekstra figur behøves.

Oppgave 2 Kartellvirksomhet

20.0%
5.0%
0%
25.0%
1t 15′

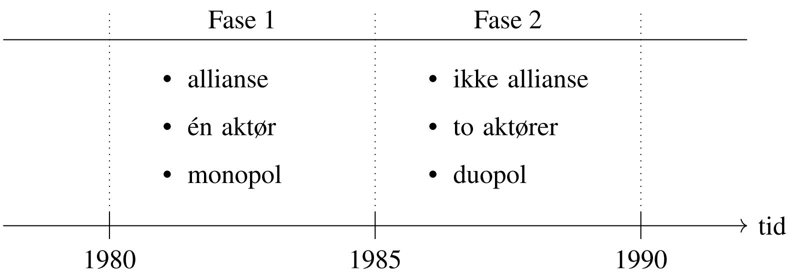
I tidsrommet 1980–1995 regjerte narkotikakartellene i Colombia.

Narkobaronen Pablo Escobar var den store kongen på 1980-tallet. Escobar styrte det såkalte Medellin-kartellet («kartell 1») som var i allianse med bl.a. Cali-kartellet («kartell 2»). Denne alliansen dominerte leveransene av narkotika til markedet i USA.



Figur 2: Pablo Escobar.

Escobar sitt imperium gjennomgikk to faser:



Fase 1: (tidlig 80-tallet)
Kartell 1 hadde monopol sammen med kartell 2. Alliansen tjente da ekstremt mye penger siden de fikk en «optimal» pris for produktet.

Fase 2: (seint 80-tallet)
Kartell 1 og 2 var i duopol. Kartellene tjente da mindre enn da de samarbeidet.

Kartellene vurderte hvor mange tonn narkotika de skulle smugle til USA hver uke.

Definisjoner:

$$q_1 = \text{antall tonn narkotika smuglet til USA av kartell 1 per uke} \tag{2.4}$$

$$q_2 = \text{antall tonn narkotika smuglet til USA av kartell 2 per uke} \tag{2.5}$$

$$Q = q_1 + q_2 = \text{antall tonn narkotika smuglet til USA totalt per uke} \tag{2.6}$$

$$\pi_1 = \text{ukentlig profitt for kartell 1 (i mill. dollar)} \tag{2.7}$$

$$\pi_2 = \text{ukentlig profitt for kartell 2 (i mill. dollar)} \tag{2.8}$$

Antagelser: (alle pris- og kostnadstall i millioner dollar)

1. Kostnadsfunksjonen er den samme for begge kartellene:

$$c(q) = 50 + 12q \quad \text{(kostnaden å smugle } q \text{ tonn narkotika til USA per uke)} \tag{2.9}$$

2. Prisen de solgte narkotikaen for er den samme for begge kartellene:

$$p(q) = 252 - 20q \quad \text{(pris for } q \text{ tonn narkotika smuglet til USA per uke)} \tag{2.10}$$

Fase 1

Når kartellene hadde en allianse, opererte de som èn aktør med monopol på markedet.

Profitten til alliansen maksimeres da ved å produsere 6 tonn per uke. Det gir en profitt for alliansen på 670 millioner dollar per uke:

$$Q^* = 6 \tag{2.11}$$

$$\pi^* = \pi(Q^*) = 670 \tag{2.12}$$

for alliansen som helhet. Så lenge begge parter holdt seg til avtalen i alliansen så delte de kvantumet og profitten broderlig mellom seg:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{Q^*}{2} = \frac{6}{2} = 3 \tag{2.13}$$

$$\pi_1^* = \pi_2^* = \frac{\pi^*}{2} = \frac{670}{2} = 335 \tag{2.14}$$

Lign.(2.11)-(2.14) skal vi bare ta for gitt. Disse resultatene skal ikke bevises i denne oppgaven.

Fase 2

Som for de fleste kartellallianser varte ikke samarbeidet.

Anta at kartell 1 forholder seg til avtalen og produserer $q_1^* = 3$ tonn narkotika per uke, mens kartell 2 ønsker å tjene ennå mer penger. Kartell 2 bestemmer seg derfor for å gå bak ryggen til det andre kartellet og smugle mer enn avtalt.

a) Vis at profittfunksjonen til kartell 2 er

$$\pi_2(q_2) = -20q_2^2 + 180q_2 - 50 \tag{2.15}$$

7.5%
22.5′

b) Bestem antall tonn q_2^* som kartell 2 må smugle over grensen for å maksimere sin egen profitt i lign.(2.15).

7.5%
22.5′

Bruke både 1. og 2. derivasjonstesten for å komme frem til ditt svar.

c) Med q_2^* som i oppgave **2b**, regn ut den nye prisen.

2.5%
7.5′

d) Bestem hvor mye profitt kartell 1 og kartell 2 får hver for seg når kartell 2 følger sin lumske plan, dvs. finn de numeriske verdiene til π_1 og π_2.

5%
15.0′

e) Kommenter svarene av resultatene i oppgave **2d**, og sammenlign med situasjonen når begge kartelle holder seg til avtalen, dvs. lign.(2.14). Vil det ene kartellet sin ekstraprofitt gå på bekostning av det andre kartellet?

2.5%
7.5′

To eller tre setninger er nok.

Oppgave 3 Logistikk

7.5%
17.5%
0%
25.0%
1t 15′

Glamox er en norsk produsent og leverandør av belysning.

Anta at «LED downlight O67-R», se figur 3, skal fases ut på grunn av nye forskrifter. De nye forskriftene trer i kraft 1. juli 2019.

Figur 3: LED downlight O67-R.

Anta videre at Glamox har

$$N = 1\,430 \tag{3.16}$$

slike «downlight» på lager per 1. januar 2019. De ønsker derfor å selge alle disse «downlight»-lampene i løpet av de første $n = 52/2 = 26$ ukene i 2019 slik at de slipper å brenne inne med lamper de ikke får solgt.

Anta at det etterspørres 80 slike lamper i uke 1 i 2019. Siden dette er lamper som fases ut så vil etterspørselen reduseres fra uke til uke.

Anta at etterspørselen reduseres med tre lamper $f = 3$ per uke for alle 26 ukene:

$$a_1 = 80 \tag{3.17}$$

$$a_2 = a_1 + (-f) = a_1 - f \tag{3.18}$$

$$a_3 = a_1 + 2(-f) = a_1 - 2f \tag{3.19}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} a_i &= a_1 + (i-1)(-f) = a_1 - (i-1)f \\ &= \text{etterspørsel av lamper uke } i \end{aligned} \tag{3.20}$$

hvor $i = 1, 2, 3, \ldots, 26$.

a) Hva slags type rekke representerer a_i, hvor $i = 1, 2, \ldots, 26$?
Gi en *kort* begrunnelse.

2.5%
7.5′

Den samlede etterspørselen av antall lamper de 26 første ukene i 2019 er:

$$S_{26} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{26} = \sum_{i=1}^{26} a_i \tag{3.21}$$

b) Vis at summen S_n er gitt ved:

2.5%
7.5′

$$S_n = n\left(a_1 - \frac{n-1}{2}f\right) \tag{3.22}$$

PS: Denne oppgaven er veldig kort.

c) Bruk lign.(3.22) og regn ut den numeriske verdien av S_{26}.

2.5%
7.5′

Siden Glamox har

$$N = 1\,430 \tag{3.23}$$

lamper på lager per 1. januar 2019 så vil de ikke selge nok lamper til at de er tom på lager innen de nye forskriftene trer i kraft.

d) Vis ved lign.(3.22) og (3.23) at dersom Glamox skal selge ut hele lageret sitt de første 26 ukene så må etterspørselen per uke reduseres til

7.5%
22.5′

$$f_{\text{ny}} = 2 \tag{3.24}$$

Glamox ønsker å selge unna alle lampene de har på lager i løpet av de 26 aktuelle ukene. Men for å oppnå at $f = 3$ reduseres til $f_{\text{ny}} = 2$ må prisen $p = 450$ NOK reduseres til en ny pris p_{ny}.

Anta at det er følgende sammenheng mellom prisene og størrelsene f og f_{ny}:

$$f_{\text{ny}} = f\,10^{-c(p-p_{\text{ny}})} \tag{3.25}$$

hvor

$$c = 0.001 \tag{3.26}$$

e) Bruk lign.(3.25) og finn den nye prisen p_{ny} på lampen.

10%

30.0′

Oppgave 4 Økonomi og logistikk

2.5%
12.5%
10.0%
25.0%
1t 15′

La oss se på to energiverk, energiverk 1 og energiverk 2, se figur 4. La x og y betegne antall megawatt timer, MW h, som produseres i disse to energiverkene per døgn:

$$x = \text{antall MW h per døgn som produseres ved energiverk 1} \tag{4.27}$$

$$y = \text{antall MW h per døgn som produseres ved energiverk 2} \tag{4.28}$$

Anta at kostnadene per døgn ved energiverk 1 og 2: (i NOK)

$$K_1(x) = \frac{1}{5}x^2 + 180x + 3\,750 \tag{4.29}$$

$$K_2(y) = \frac{1}{5}y^2 + 100y + 2\,900 \tag{4.30}$$

Den samlede kostnaden per døgn for disse to energiverkene $K(x,y) = K_1(x) + K_2(y)$ er da gitt ved:

$$K(x,y) = \frac{1}{5}x^2 + 180x + \frac{1}{5}y^2 + 100y + 6\,650 \tag{4.31}$$

Figur 4: Energiverk.

Selskapet som eier energiverkene har inngått en avtale med et firma om at de to aktuelle energiverkene skal produsere og levere til sammen 800 MW h per døgn til en fast pris. Dette betyr at de må oppfylle:

$$g(x,y) = x + y - 800 = 0 \tag{4.32}$$

hvor $x + y$ er den totale mengden strøm produsert per døgn. [4]

Siden de har en fast pris på strømmen så ønsker de å minimere totalkostnaden. Selskapet ønsker altså å minimere $K(x,y)$ under bibetingelsen i lign.(4.32).

[4] I tillegg må selvsagt størrelsene x og y være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

a) Skriv opp Langrange-funksjonen $L(x,y;\lambda)$ for $K(x,y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(4.32). [5]

2.5%
7.5′

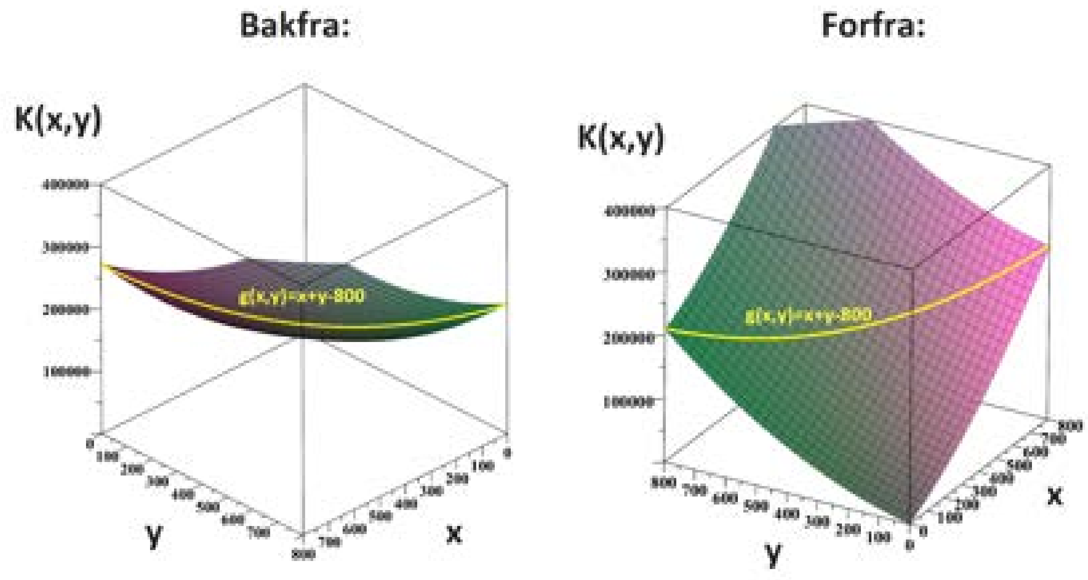
b) Regn ut de partiell deriverte av Lagrange-funksjonen fra oppgave **4a** i både x- og y-retning, dvs. regn ut:

5%
15.0′

$$\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial y} \tag{4.33}$$

c) Hvordan må fordelingen av antall MW h være mellom de to energiverkene for at energiselskapet skal minimere sin samlede kostnad $K(x,y)$? [6]

7.5%
22.5′



Figur 5: Kostnad $K(x,y)$ og bibetingelse $g(x,y)$.

Anta at kostnadene for strømproduksjon hos energiverk 1 øker på en slik måte at kostnadsfunksjonen i lign.(4.29) endres til

$$K_1(x) = \frac{1}{5}x^2 + (180+\varepsilon)x + 3\,750 \tag{4.34}$$

[5] Her kreves ingen regning.

[6] Dvs. finn x og y, si x^* og y^*, som gir minimal $K(x,y)$. Bruk Lagranges multiplikator-metode. Man trenger ikke å gjøre noen 2. derivasjonstester for å sjekke om optimum man finner faktisk er et minimum.

d) Finn økningen i den optimale totale kostnaden som funksjon av ε.[7]

10%

30.0′

[7] Dette er en A-oppgave. Hopp over den dersom du har dårlig tid. Oppgaven krever en del regning dersom du velger å løse den «for hånd». Man kan også løse den ved hjelp av GeoGebra eller chatGPT.