Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Avdeling for logistikk

Eksamen i

MAT100/MAT100N Matematikk

Høst 2023

Eksamensdag:	**Mandag 18. des. 2023**
Tid:	**09:00–14:00**
Faglærer/tlf nr:	**Per Kristian Rekdal / 924 97 051**
Hjelpemidler:	**PC tillatt med internett + alle skrevne og trykte hjelpemidler**
Antall sider inkl.forsiden:	**23**
Målform:	**Bokmål**

Vanskelighetsgrad	**Andel oppgaver**	**Beskrivelse**
	40.0%	Jeg er fornøyd med å stå, *E* eller *D*.
	40.0%	Jeg er fornøyd med å være «midt på treet», dvs. *C*.
	20.0%	Jeg tar sikte på en toppkarakter, *A* eller *B*.
+ +	100.0%	

Karakterskala:

100% – 90%	$\rightarrow$	*A*
80% – 89%	$\rightarrow$	*B*
60% – 79%	$\rightarrow$	*C*
50% – 59%	$\rightarrow$	*D*
40% – 49%	$\rightarrow$	*E*
0% – 39%	$\rightarrow$	*F* (stryk)

Tid 5t: Tiden som står på hver deloppgave er kun forventet tidforbruk. Det er altså kun et estimat, og kan variere fra person til person. Det går helt fint å bruke litt mer eller litt mindre tid enn dette estimatet.

Fusk: Det er ikke lov å samarbeide med andre når man har hjemmeksamen.

Oppgave 1 Haltenbanken

10.0%
5.0%
10.0%
25.0%
1t 15′

Draugen er en borerigg utenfor kysten til Midt-Norge.


Figur 1: Draugen. Tanking.

Oljen fra Draugen ligger på havbunnen. Når et tankskip skal hente olje, pumpes oljen fra havbunnen som vist i figur 1.

Dersom bølgehøyden er over en viss kritisk høyde k, kan ikke tankskipet pumpe inn olje. Skipet blir da liggende og vente til bølgehøyden komme under den kritiske høyden k.

Når tankskipet ligger og venter, taper oljeselskapet mye penger.

For å unngå å sende tankskip til Draugen i de tidspunkt hvor bølgene er for høye, fremskaffer oljeselskapene prognoser for bølgehøyden $h(t)$ for et visst antall dager frem i tid.

Anta at prognosene for den typiske bølgehøyden $h(t)$ for de neste 7 dagene er gitt ved 6. gradspolynomet:

$$h(t) = -0.10t^6 + 2.02t^5 - 15.085t^4 + 50.71t^3 - 73.735t^2 + 36.19t + 4 \tag{1.1}$$

for tiden $0 \leq t \leq 7$.

a) Tegn opp polynomet i lign.(1.1) ved hjelp av GeoGebra.

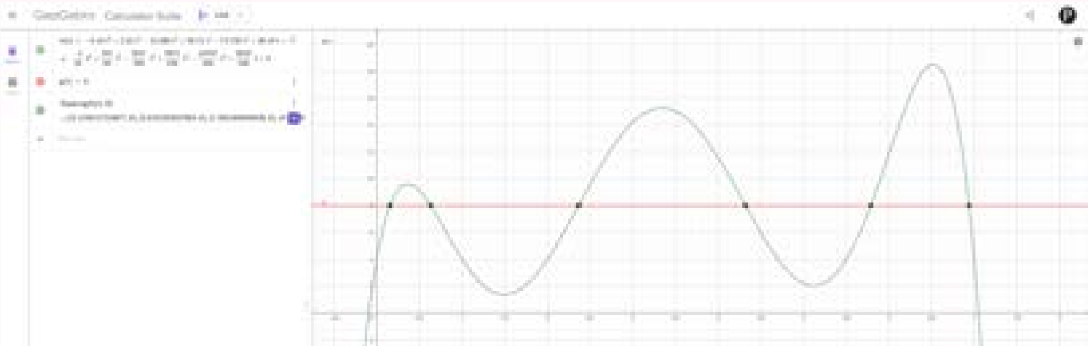
5%
15.0′

Tegn slik at verdiene til t typisk ligger mellom 0 og 7, og at $h(t)$ typisk ligger mellom 0 og 20. [1]

[1] Det er i orden at du tegner av figuren fra GeoGebra «for hånd» på arket ditt. Alternativt kan du bruke chatGPT eller Wolfram for å tegne polynomet. Velg det programmet du liker best.

Løsning

Polynomet i GeoGebra:



Figur 2: Bølgehøyden $h(t)$ og kritisk bølgehøyde $y = 8$ (rød linje).

Anta at den kritiske bølgehøyden er

$$k = 8 \text{ meter} \tag{1.2}$$

b) Les av på grafen de tidsintervallene mellom $0 \leq t \leq 7$ hvor tankskipet ikke kan pumpe olje pga. for stor bølgehøyde. [2]

5%

15.0′

Løsning

Legger inn linjen $y = k = 8$ i figur 2.

Fra grafen i denne figuren sees at intervallene hvor bølgehøyden er over den kritiske høyden $k = 8$ meter er ved de tre intervallene: [a]

$$I_1 = \langle 0.15\,, 0.63 \rangle \tag{1.3}$$

$$I_2 = \langle 2.37\,, 4.32 \rangle \tag{1.4}$$

$$I_3 = \langle 5.79\,, 6.94 \rangle \tag{1.5}$$

I disse tidsperiodene kan ikke tankskipet fylle olje.

[a] I GeoGebra kan man blant annet trykke på skjæringspunktene direkte i figuren eller skrive «Skjæring $(\cdot\,,\,\cdot)$» i kommando-linjen, se figur 2.

[2] Ingen utregninger behøves. Legg inn linjen $y = 8$ og les av fra GeoGebra. To desimaler er nok.

Vi skal nå finne de samme tidsintervallene fra oppgave **1b** en gang til, men denne gangen ved regning via fundamentalsetningen for algebra samt fortegnsskjema.

Bølgehøyden $h(t)$ når den kritiske verdien $k = 8$ meter totalt 6 ganger innenfor intervallet $0 \leq t \leq 7$. Kall disse tidspunktene $c_1, \dots, c_6$.

c) Bruk GeoGebra-figuren fra oppgave **1a** og finn tidspunktene $c_1, \dots, c_6$.[3]

5%
15.0′

Løsning

Tidspunktene $c_1, \dots, c_6$ hvor høyden $h(t)$ er 8 meter finner vi ved å lese av skjæringspunktene mellom $h(t)$ og $y = k = 8$ i figuren fra oppgave **1a**:

$$c_1 = 0.15 \tag{1.6}$$

$$c_2 = 0.63 \tag{1.7}$$

$$c_3 = 2.37 \tag{1.8}$$

$$c_4 = 4.32 \tag{1.9}$$

$$c_5 = 5.79 \tag{1.10}$$

$$c_6 = 6.94 \tag{1.11}$$

Ifølge fundamentalsetningen for algebra kan polynomet $h(t) - k$ skrives

$$\begin{aligned} h(t) - k &= -0.10t^6 + 2.02t^5 - 15.085t^4 + 50.71t^3 - 73.735t^2 + 36.19t + 4 - k \\ &= -0.10(t-c_1)(t-c_2)(t-c_3)(t-c_4)(t-c_5)(t-c_6) \qquad (1.12) \end{aligned}$$

hvor $c_1, \dots, c_6$ er nullpunktene til polynomet $h(t) - k$ som vi fant i oppgave **1c**.

d) Bruk lign.(1.12) og sett opp fortegnsskjema for $h(t) - k$.

10%
30.0′

Basert på dette fortegnsskjemaet, finn de tidsintervallene hvor tankskipet ikke kan pumpe olje pga. for stor bølgehøyde.

Fikk du samme svar som i oppgave **1b**?

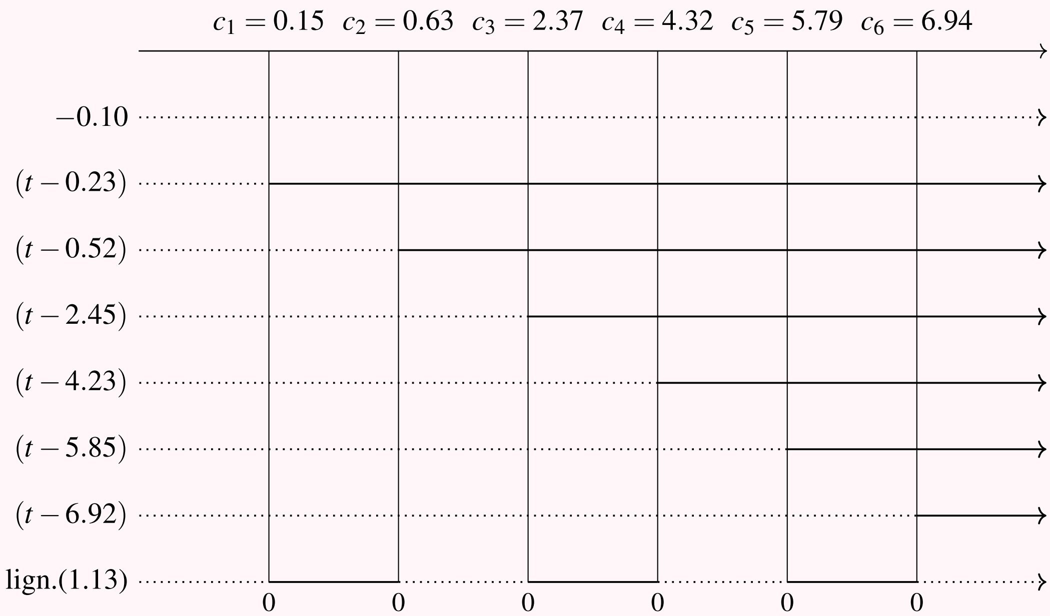
[3] Ingen utregninger behøves. Bare finn tallverdiene for $c_1, \dots, c_6$ via GeoGebra og skriv dem ned. To desimaler er nok. Ingen ekstra figur behøves.

Løsning

Tidspunktene $c_1, \ldots, c_6$ fra oppgave **1c** er nullpunktene til polynomet $h(t) - k$:

$$\underbrace{h(t) - k = -0.1(t-0.15)(t-0.63)(t-2.37)(t-4.23)(t-5.79)(t-6.94) > 0}_{\text{faktorisert form}} \tag{1.13}$$

Fortegnsskjema:



Figur 3: Fortegnsskjema.

Fortegnskjemaet viser at det er tre intervaller hvor polynomet $h(t) - k > 0$:

$$\mathscr{L} = \langle 0.15\,, 0.63\rangle \cup \langle 2.37\,, 4.23\rangle \cup \langle 5.79\,, 6.94\rangle \tag{1.14}$$

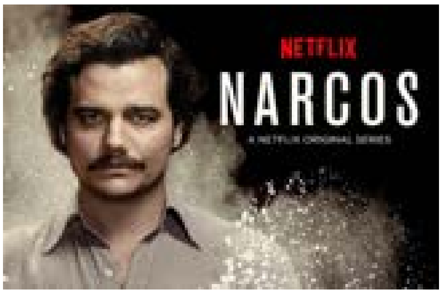
Vi konkluderer med at vi har regnet oss frem til de samme intervallene som vi fant ved avlesning fra GeoGebra i oppgave **1b**.

Oppgave 2 Kartellvirksomhet

20.0%
5.0%
0%
25.0%
1t 15′

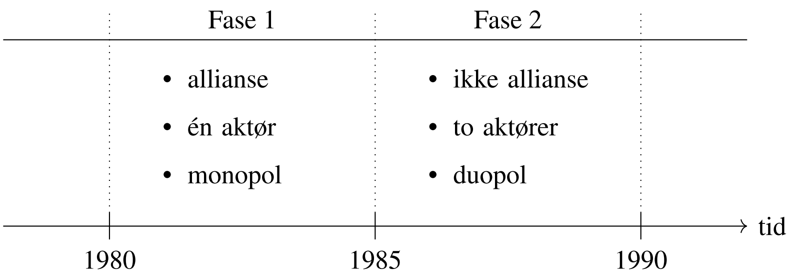
I tidsrommet 1980–1995 regjerte narkotikakartellene i Colombia.

Narkobaronen Pablo Escobar var den store kongen på 1980-tallet. Escobar styrte det såkalte Medellin-kartellet («kartell 1») som var i allianse med bl.a. Cali-kartellet («kartell 2»). Denne alliansen dominerte leveransene av narkotika til markedet i USA.



Figur 4: Pablo Escobar.

Escobar sitt imperium gjennomgikk to faser:



Fase 1: (tidlig 80-tallet)
Kartell 1 hadde monopol sammen med kartell 2. Alliansen tjente da ekstremt mye penger siden de fikk en «optimal» pris for produktet.

Fase 2: (seint 80-tallet)
Kartell 1 og 2 var i duopol. Kartellene tjente da mindre enn da de samarbeidet.

Kartellene vurderte hvor mange tonn narkotika de skulle smugle til USA hver uke.

Definisjoner:

$$q_1 = \text{antall tonn narkotika smuglet til USA av kartell 1 per uke} \tag{2.15}$$

$$q_2 = \text{antall tonn narkotika smuglet til USA av kartell 2 per uke} \tag{2.16}$$

$$Q = q_1 + q_2 = \text{antall tonn narkotika smuglet til USA totalt per uke} \tag{2.17}$$

$$\pi_1 = \text{ukentlig profitt for kartell 1 (i mill. dollar)} \tag{2.18}$$

$$\pi_2 = \text{ukentlig profitt for kartell 2 (i mill. dollar)} \tag{2.19}$$

Antagelser: (alle pris- og kostnadstall i millioner dollar)

1. Kostnadsfunksjonen er den samme for begge kartellene:

$$c(q) = 50 + 12q \quad \text{(kostnaden å smugle } q \text{ tonn narkotika til USA per uke)} \tag{2.20}$$

2. Prisen de solgte narkotikaen for er den samme for begge kartellene:

$$p(q) = 252 - 20q \quad \text{(pris for } q \text{ tonn narkotika smuglet til USA per uke)} \tag{2.21}$$

Fase 1

Når kartellene hadde en allianse, opererte de som èn aktør med monopol på markedet.

Profitten til alliansen maksimeres da ved å produsere 6 tonn per uke. Det gir en profitt for alliansen på 670 millioner dollar per uke:

$$Q^* = 6 \tag{2.22}$$

$$\pi^* = \pi(Q^*) = 670 \tag{2.23}$$

for alliansen som helhet. Så lenge begge parter holdt seg til avtalen i alliansen så delte de kvantumet og profitten broderlig mellom seg:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{Q^*}{2} = \frac{6}{2} = 3 \tag{2.24}$$

$$\pi_1^* = \pi_2^* = \frac{\pi^*}{2} = \frac{670}{2} = 335 \tag{2.25}$$

Lign.(2.22)-(2.25) skal vi bare ta for gitt. Disse resultatene skal ikke bevises i denne oppgaven.

Fase 2

Som for de fleste kartellallianser varte ikke samarbeidet.

Anta at kartell 1 forholder seg til avtalen og produserer $q_1^* = 3$ tonn narkotika per uke, mens kartell 2 ønsker å tjene ennå mer penger. Kartell 2 bestemmer seg derfor for å gå bak ryggen til det andre kartellet og smugle mer enn avtalt.

a) Vis at profittfunksjonen til kartell 2 er

$$\pi_2(q_2) = -20q_2^2 + 180q_2 - 50 \tag{2.26}$$

7.5%
22.5′

Løsning

Siden $q_1 = 3$ så er:

$$Q = q_1 + q_2 = 3 + q_2 \tag{2.27}$$

Ny pris:

$$\begin{aligned} p(Q) &= 252 - 20Q \qquad (Q = 3 + q_2) && (2.28)\\ &= 252 - 20(3 + q_2) && (2.29)\\ &= 252 - 60 - 20q_2 && (2.30)\\ &= 192 - 20q_2 && (2.31) \end{aligned}$$

Med uendret kosntadsfunksjon $c(q) = 50 + 12q$, får kartell 2 profittfunksjonen:

$$\begin{aligned} \pi_2(q_2) &= p(q_2)q_2 - c(q_2) \qquad (p(q_2) = 192 - 20q_2) && (2.32)\\ &= (192 - 20q_2)\,q_2 - 50 - 12q_2 && (2.33)\\ &= 192q_2 - 20q_2^2 - 50 - 12q_2 && (2.34)\\ &= -20q_2^2 + 180q_2 - 50 && (2.35) \end{aligned}$$

b) Bestem antall tonn q_2^* som kartell 2 må smugle over grensen for å maksimere sin egen profitt i lign.(2.26).

7.5%
22.5′

Bruke både 1. og 2. derivasjonstesten for å komme frem til ditt svar.

Løsning

Den deriverte av profittfunksjonen i lign.(2.26):

$$\frac{d\pi_2(q_2)}{dq_2} = \frac{d}{dq_2}\Big(-20q_2^2 + 180q_2 - 50\Big) = -40q_2 + 180 \tag{2.36}$$

1. derivajonstesten:

$$\frac{d\pi_2(q_2)}{dq_2} = 0 \tag{2.37}$$

$$\Updownarrow$$

$$-40q_2 + 180 = 0 \tag{2.38}$$

$$\Updownarrow$$

$$q_2 = \frac{180}{40} = 4.5 \tag{2.39}$$

2. derivasjonstesten (må teste at $q_2 = 4.5$ repr. et lokalt maksimum)

$$\frac{d^2\pi_2(q_2)}{dq_2^2} = \frac{d}{dq_2}\Big(-40q_2 + 180\Big) = -40 \qquad \text{(negativ)} \tag{2.40}$$

dvs.

$$q_2^* = 4.5 \qquad \text{representerer lokalt maksimum} \tag{2.41}$$

Det er dermed optimalt for kartell 2 å smugle $q_2^* = 4.5$ tonn narkotika per uke.

Kartell 2 smugler da 1.5 tonn i det stille, dvs. bak ryggen til kartell 1.

c) Med q_2^* som i oppgave **2b**, regn ut den nye prisen.

2.5%
7.5′

Løsning

Med

$$Q = q_1 + q_2 = 3 + 4.5 = 7.5 \tag{2.42}$$

så er den nye prisen, via lign.(2.21):

$$p(Q) = 252 - 20Q \tag{2.43}$$

$$= 252 - 20 \cdot 7.5 \tag{2.44}$$

$$= 102 \tag{2.45}$$

Den nye markedsprisen er 102 mill. dollar per tonn.

d) Bestem hvor mye profitt kartell 1 og kartell 2 får hver for seg når kartell 2 følger sin lumske plan, dvs. finn de numeriske verdiene til π_1 og π_2.

5%
15.0′

Løsning

Kartell 1: (som holder seg til avtalen)

$$\pi_1 = pq_1 - c(q_1) = 102 \cdot 3 - (50 + 12 \cdot 3) = 220 \tag{2.46}$$

Kartell 2: (som bryter avtalen)

$$\pi_2 = pq_2 - c(q_2) = 102 \cdot 4.5 - (50 + 12 \cdot 4.5) = 355 \tag{2.47}$$

e) Kommenter svarene av resultatene i oppgave **2d**, og sammenlign med situasjonen når begge kartelle holder seg til avtalen, dvs. lign.(2.25). Vil det ene kartellet sin ekstraprofitt gå på bekostning av det andre kartellet?

2.5%
7.5′

To eller tre setninger er nok.

Løsning

Under monopol-alliansen tjente hver av kartellene, se lign.(2.23):

$$\frac{\pi^*}{2} = \frac{670}{2} = 335 \tag{2.48}$$

millioner dollar per uke.

Kartell 2, som brøt avtalen, tjener hele 355 millioner dollar per uke. Kartell 1 derimot, som holdt seg til avtalen, får sin fortjeneste dramatisk redusert, nemlig til bare 220 millioner dollar per uke.

Dermed er det duket for narkokrig!

Oppgave 3 Logistikk

7.5%
17.5%
0%
25.0%
1t 15′

Glamox er en norsk produsent og leverandør av belysning.

Anta at «LED downlight O67-R», se figur 5, skal fases ut på grunn av nye forskrifter. De nye forskriftene trer i kraft 1. juli 2019.

Figur 5: LED downlight O67-R.

Anta videre at Glamox har

$$N = 1\,430 \tag{3.49}$$

slike «downlight» på lager per 1. januar 2019. De ønsker derfor å selge alle disse «downlight»-lampene i løpet av de første $n = 52/2 = 26$ ukene i 2019 slik at de slipper å brenne inne med lamper de ikke får solgt.

Anta at det etterspørres 80 slike lamper i uke 1 i 2019. Siden dette er lamper som fases ut så vil etterspørselen reduseres fra uke til uke.

Anta at etterspørselen reduseres med tre lamper $f = 3$ per uke for alle 26 ukene:

$$a_1 = 80 \tag{3.50}$$

$$a_2 = a_1 + (-f) = a_1 - f \tag{3.51}$$

$$a_3 = a_1 + 2(-f) = a_1 - 2f \tag{3.52}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} a_i &= a_1 + (i-1)(-f) = a_1 - (i-1)f \\ &= \text{etterspørsel av lamper uke } i \end{aligned} \tag{3.53}$$

hvor $i = 1, 2, 3, \ldots, 26$.

a) Hva slags type rekke representerer a_i, hvor $i = 1, 2, \ldots, 26$?
Gi en *kort* begrunnelse.

2.5%
7.5′

Løsning

Rekken $a_i = a_1 - (i-1)f$ er på formen $a_{i+1} - a_i = -f$, hvor $f =$ en konstant.

Derfor er det en aritmetisk rekke.

Den samlede etterspørselen av antall lamper de 26 første ukene i 2019 er:

$$S_{26} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{26} = \sum_{i=1}^{26} a_i \tag{3.54}$$

b) Vis at summen S_n er gitt ved:

2.5%

7.5′

$$S_n = n\left(a_1 - \frac{n-1}{2}f\right) \tag{3.55}$$

PS: Denne oppgaven er veldig kort.

Løsning

Fra oppgave **3a** vet vi at $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ er en aritmetisk rekke.
Summen av en aritmetisk rekke: (fra formelsamlingen eller andre plasser)

$$S_n = n\left(a + \frac{n-1}{2}d\right) \tag{3.56}$$

For vår rekke er kvotienten $d = -f$ og $a = a_1$. Dermed følger svaret umiddelbart.

$$S_n = n\left(a_1 + \frac{n-1}{2}(-f)\right) = n\left(a_1 - \frac{n-1}{2}f\right) \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{3.57}$$

c) Bruk lign.(3.55) og regn ut den numeriske verdien av S_{26}.

2.5%

7.5′

Løsning

Bruk lign.(3.55) med $n = 26$, $a_1 = 80$ og $f = 3$:

$$S_{26} = 26\left(a_1 - \frac{26-1}{2}f\right) \tag{3.58}$$

$$= 26\left(80 - \frac{26-1}{2}3\right) \tag{3.59}$$

$$= 1\,105 \text{ lamper} \tag{3.60}$$

Altså den totale etterspørselen av lamper de 26 første ukene var 1 105 lamper.

Siden Glamox har

$$N = 1\,430 \tag{3.61}$$

lamper på lager per 1. januar 2019 så vil de ikke selge nok lamper til at de er tom på lager innen de nye forskriftene trer i kraft.

d) Vis ved lign.(3.55) og (3.61) at dersom Glamox skal selge ut hele lageret sitt de første 26 ukene så må etterspørselen per uke reduseres til

7.5%
22.5′

$$f_{\text{ny}} = 2 \tag{3.62}$$

Løsning

Dersom Glamox skal selge alle $N = 1\,430$ lampene de første $n = 26$ månedene så betyr det at:

$$S_n = N \tag{3.63}$$

Bruker lign.(3.55) og løser med hensyn på f_{ny} alene:

$$n\left(a_1 - \frac{n-1}{2}f_{\text{ny}}\right) = N \qquad \Big| \cdot \frac{1}{n} \tag{3.64}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1 - \frac{n-1}{2}f_{\text{ny}} = \frac{N}{n} \tag{3.65}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1 - \frac{N}{n} = \frac{n-1}{2}f_{\text{ny}} \qquad \Big| \cdot \frac{2}{n-1} \tag{3.66}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{n-1}\left(a_1 - \frac{N}{n}\right) = f_{\text{ny}} \tag{3.67}$$

Tall:

$$f_{ny} = \frac{2}{n-1}\left(a_1 - \frac{N}{n}\right) \tag{3.68}$$

$$= \frac{2}{26-1}\left(80 - \frac{1430}{26}\right) \tag{3.69}$$

$$= 2 \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{3.70}$$

Glamox ønsker å selge unna alle lampene de har på lager i løpet av de 26 aktuelle ukene. Men for å oppnå at $f = 3$ reduseres til $f_{ny} = 2$ må prisen $p = 450$ NOK reduseres til en ny pris p_{ny}.

Anta at det er følgende sammenheng mellom prisene og størrelsene f og f_{ny}:

$$f_{ny} = f10^{-c(p-p_{ny})} \tag{3.71}$$

hvor

$$c = 0.001 \tag{3.72}$$

e) Bruk lign.(3.71) og finn den nye prisen p_{ny} på lampen.

10%
30.0′

Løsning

Oppgitt i oppgaven:

$$f_{ny} = f10^{-c(p-p_{ny})} \tag{3.73}$$

og løser med hensyn på prisen p alene:

$$f_{ny} = f10^{-c(p-p_{ny})} \quad \Big| \cdot \frac{1}{f} \tag{3.74}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f_{ny}}{f} = 10^{-c(p-p_{ny})} \quad \Big| \log \tag{3.75}$$

$$\Updownarrow$$

$$\log\left(\frac{f_{ny}}{f}\right) = \log\left(10^{-c(p-p_{ny})}\right) \tag{3.76}$$

$$\Updownarrow$$

$$\log\left(\frac{f_{\text{ny}}}{f}\right) = -c(p - p_{\text{ny}}) \qquad \Big| \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) \tag{3.77}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1}{c}\log\left(\frac{f_{\text{ny}}}{f}\right) = p - p_{\text{ny}} \tag{3.78}$$

$$\Updownarrow$$

$$p_{\text{ny}} = p + \frac{1}{c}\log\left(\frac{f_{\text{ny}}}{f}\right) \tag{3.79}$$

Til slutt setter vi inn tall:

$$p_{\text{ny}} = p + \frac{1}{c}\log\left(\frac{f_{\text{ny}}}{f}\right) \tag{3.80}$$

$$= \left(450 + \frac{1}{0.001}\log\left(\frac{2}{3}\right)\right)\text{NOK} \tag{3.81}$$

$$= 274\text{ NOK} \tag{3.82}$$

Dersom Glamox skal selge ut de 1 430 aktuelle lampene i løpet av de 26 første ukene i 2019 så må de sette ned prisen til 274 NOK per lampe.

Oppgave 4 Økonomi og logistikk

2.5%
12.5%
10.0%
25.0%
1t 15′

La oss se på to energiverk, energiverk 1 og energiverk 2, se figur 6. La x og y betegne antall megawatt timer, MW h, som produseres i disse to energiverkene per døgn:

$$x = \text{antall MW h per døgn som produseres ved energiverk 1} \tag{4.83}$$

$$y = \text{antall MW h per døgn som produseres ved energiverk 2} \tag{4.84}$$

Anta at kostnadene per døgn ved energiverk 1 og 2: (i NOK)

$$K_1(x) = \frac{1}{5}x^2 + 180x + 3\,750 \tag{4.85}$$

$$K_2(y) = \frac{1}{5}y^2 + 100y + 2\,900 \tag{4.86}$$

Den samlede kostnaden per døgn for disse to energiverkene $K(x,y) = K_1(x) + K_2(y)$ er da gitt ved:

$$K(x,y) = \frac{1}{5}x^2 + 180x + \frac{1}{5}y^2 + 100y + 6\,650 \tag{4.87}$$

Figur 6: Energiverk.

Selskapet som eier energiverkene har inngått en avtale med et firma om at de to aktuelle energiverkene skal produsere og levere til sammen 800 MW h per døgn til en fast pris. Dette betyr at de må oppfylle:

$$g(x,y) = x + y - 800 = 0 \tag{4.88}$$

hvor $x + y$ er den totale mengden strøm produsert per døgn. [4]

Siden de har en fast pris på strømmen så ønsker de å minimere totalkostnaden. Selskapet ønsker altså å minimere $K(x,y)$ under bibetingelsen i lign.(4.88).

[4] I tillegg må selvsagt størrelsene x og y være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

a) Skriv opp Langrange-funksjonen $L(x,y;\lambda)$ for $K(x,y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(4.88). [5]

2.5%
7.5′

Løsning

Lagrange-funksjonen

$$L(x,y;\lambda) = K(x,y) - \lambda g(x,y) \tag{4.89}$$

med kostnadsfunksjonen som i lign.(4.87) og bibetingelsen som i lign.(4.88) er:

$$L(x,y;\lambda) = \frac{1}{5}x^2 + 180x + \frac{1}{5}y^2 + 100y + 6\,650 - \lambda\left(x+y-800\right) \tag{4.90}$$

b) Regn ut de partiell deriverte av Lagrange-funksjonen fra oppgave **4a** i både x- og y-retning, dvs. regn ut:

5%
15.0′

$$\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial y} \tag{4.91}$$

Løsning

Partiell derivert av $L(x,y;\lambda)$ i x-retning:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{5}x^2 + 180x + \frac{1}{5}y^2 + 100y + 6\,650\right) - \lambda\frac{\partial}{\partial x}(x+y-800)\\ &= \frac{2}{5}x + 180 - \lambda \end{aligned} \tag{4.92}$$

Partiell derivert av $L(x,y;\lambda)$ i y-retning:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{5}x^2 + 100x + \frac{1}{5}y^2 + 100y + 6\,650\right) - \lambda\frac{\partial}{\partial y}(x+y-800)\\ &= \frac{2}{5}y + 100 - \lambda \end{aligned} \tag{4.93}$$

c) Hvordan må fordelingen av antall MW h være mellom de to energiverkene for at energiselskapet skal minimere sin samlede kostnad $K(x,y)$? [6]

7.5%
22.5′

[5] Her kreves ingen regning.

[6] Dvs. finn x og y, si x^* og y^*, som gir minimal $K(x,y)$. Bruk Lagranges multiplikator-metode. Man trenger ikke å gjøre noen 2. derivasjonstester for å sjekke om optimum man finner faktisk er et minimum.

Løsning

Løser $\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial x} = 0$ først:

$$\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial x} = 0 \tag{4.94}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{5}x + 180 - \lambda = 0 \qquad \Big| + \lambda \tag{4.95}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{5}x + 180 = \lambda \tag{4.96}$$

Deretter løser vi $\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial y} = 0$:

$$\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial y} = 0 \tag{4.97}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{5}y + 100 - \lambda = 0 \qquad \Big| + \lambda \tag{4.98}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{5}y + 100 = \lambda \tag{4.99}$$

Ved hjelp av lign.(4.96) og (4.99) eliminere λ:

$$\lambda = \lambda \tag{4.100}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{5}x + 180 = \frac{2}{5}y + 100 \qquad \Big| \cdot \frac{5}{2} \tag{4.101}$$

$$\Updownarrow$$

$$x + 450 = y + 250 \qquad \Big| - 300 \tag{4.102}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = y + 250 - 450 \tag{4.103}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = y - 200 \tag{4.104}$$

Setter lign.(4.119) inn i bibetingelsen:

$$x + y - 800 = 0 \tag{4.105}$$

$$\Updownarrow$$

$$y - 200 + y - 800 = 0 \qquad \Big| +1\,000 \tag{4.106}$$

$$\Updownarrow$$

$$2y = 1\,000 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{2} \tag{4.107}$$

$$\Updownarrow$$

$$y^* = 500 \tag{4.108}$$

Setter lign.(4.108) inn i bibtingelsen i lign.(4.119):

$$x^* = y^* - 200 = 500 - 200 = 300 \tag{4.109}$$

Med en produksjon på 800 MW h per døgn, er det optimalt å produsere:

$$x^* = 300\,\text{MW h per døgn ved energiverk 1} \tag{4.110}$$

$$y^* = 500\,\text{MW h per døgn ved energiverk 2} \tag{4.111}$$

Anta at kostnadene for strømproduksjon hos energiverk 1 øker på en slik måte at kostnadsfunksjonen i lign.(4.85) endres til

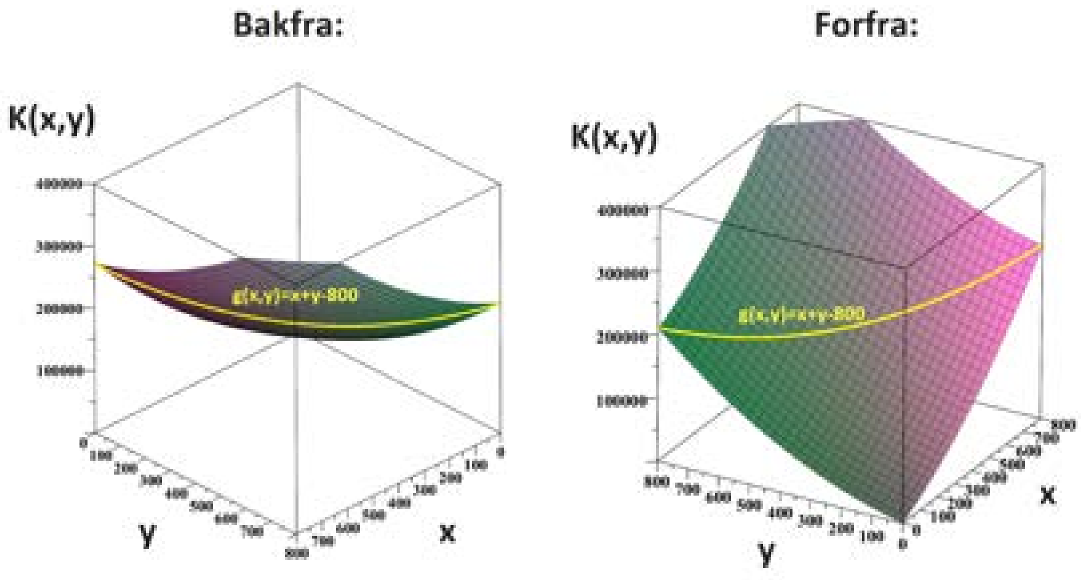
$$K_1(x) = \frac{1}{5}x^2 + (180 + \varepsilon)x + 3\,750 \tag{4.112}$$

d) Finn økningen i den optimale totale kostnaden som funksjon av ε.[7]

10%

30.0′

[7]Dette er en *A*-oppgave. Hopp over den dersom du har dårlig tid. Oppgaven krever en del regning dersom du velger å løse den «for hånd». Man kan også løse den ved hjelp av GeoGebra eller chatGPT.



Figur 7: Kostnad $K(x,y)$ og bibetingelse $g(x,y)$.

Løsning

Strategi:

- Steg 1: Finne x^*_{ny} beskrevet av den gamle optimale x^* og ε.
  . Tilsvarende for y^*_{ny}.
- Steg 2: Med x^*_{ny} og y^*_{ny} regner vi ut $K_{\text{ny}}(x^*_{\text{ny}}, y^*_{\text{ny}})$.

Steg 1:

Utregningen blir som i oppgavene **4a**, **4b** og **4c**, men hvor vi bytter ut 180 med $180+\varepsilon$.

Lign.(4.96), altså $\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial x} = 0$, blir da:

$$\frac{2}{5}x + 180 + \varepsilon = \lambda \tag{4.113}$$

Lign.(4.99), altså $\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial y} = 0$, endrer seg ikke:

$$\frac{2}{5}y + 100 = \lambda \tag{4.114}$$

Ved hjelp av lign.(4.113) og (4.114) eliminere λ:

$$\lambda = \lambda \tag{4.115}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{5}x + 180 + \varepsilon = \frac{2}{5}y + 100 \qquad \Big| \cdot \frac{5}{2} \tag{4.116}$$

$$\Updownarrow$$

$$x + 450 + \frac{5}{2}\varepsilon = y + 250 \qquad \Big| -450 - \frac{5}{2}\varepsilon \tag{4.117}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = y + 250 - 450 - \frac{5}{2}\varepsilon \tag{4.118}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = y - 200 - \frac{5}{2}\varepsilon \tag{4.119}$$

Setter lign.(4.119) inn i bibetingelsen:

$$x + y - 800 = 0 \tag{4.120}$$

$$\Updownarrow$$

$$y - 200 - \frac{5}{2}\varepsilon + y - 800 = 0 \qquad \Big| +1\,000 + \frac{5}{2}\varepsilon \tag{4.121}$$

$$\Updownarrow$$

$$2y = 1\,000 + \frac{5}{2}\varepsilon \qquad \Big| \cdot \frac{1}{2} \tag{4.122}$$

$$\Updownarrow$$

$$y^*_{\text{ny}} = 500 + \frac{5}{4}\varepsilon \tag{4.123}$$

$$\Updownarrow$$

$$y^*_{\text{ny}} = y^* + \frac{5}{4}\varepsilon \tag{4.124}$$

hvor $y^* = 500$ er resutatet fra oppgave **4c**, lign.(4.111).

Setter lign.(4.124) inn i bibtingelsen i lign.(4.119):

$$x^*_{\text{ny}} = 800 - y^*_{\text{ny}} = 800 - \left(500 + \frac{5}{4}\varepsilon\right) = 300 - \frac{5}{4}\varepsilon = x^* - \frac{5}{4}\varepsilon \tag{4.125}$$

hvor $x^* = 300$ er resutatet fra oppgave **4c**, lign.(4.110).

Med en produksjon på 800 MW h per døgn, er det optimalt å produsere:

$$x^*_{\text{ny}} = x^* - \frac{5}{4}\varepsilon \tag{4.126}$$

$$y^*_{\text{ny}} = y^* + \frac{5}{4}\varepsilon \tag{4.127}$$

MW h per døgn ved energverk 1 og 2, henholdsvis.

<u>Steg 2</u>:

Med $K_1(x)$ som i lign.(4.112) så blir den nye totale kostnadsfunksjonen:

$$K(x,y) = \frac{1}{5}x^2 + (180+\varepsilon)x + \frac{1}{5}y^2 + 100y + 6\,650 \tag{4.128}$$

Med lign.(4.126) og (4.127):

$$K_{\text{ny}}(x^*_{\text{ny}}, y^*_{\text{ny}}) = \frac{1}{5}(x^*_{\text{ny}})^2 + (180+\varepsilon)x^*_{\text{ny}} + \frac{1}{5}(y^*_{\text{ny}})^2 + 100y^*_{\text{ny}} + 6\,650 \tag{4.129}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5}\left(x^* - \frac{5}{4}\varepsilon\right)^2 + (180+\varepsilon)\left(x^* - \frac{5}{4}\varepsilon\right) \\ &+ \frac{1}{5}\left(y^* + \frac{5}{4}\varepsilon\right)^2 + 100\left(y^* + \frac{5}{4}\varepsilon\right) + 6\,650 \end{aligned} \tag{4.130}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5}\left((x^*)^2 - 2x^*\frac{5}{4}\varepsilon + \frac{25}{16}\varepsilon^2\right) + 180x^* - 180\cdot\frac{5}{4}\varepsilon + x^*\varepsilon - \frac{5}{4}\varepsilon^2 \\ &+ \frac{1}{5}\left((y^*)^2 + 2y^*\frac{5}{4}\varepsilon + \frac{25}{16}\varepsilon^2\right) + 100y^* + 100\cdot\frac{5}{4}\varepsilon + 6\,650 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{\frac{1}{5}(x^*)^2 + 180x^* + \frac{1}{5}(y^*)^2 + 100y^* + 6\,650}^{=\,K(x^*,y^*)} \\ &+ \underbrace{\left(2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{16} - \frac{5}{4}\right)}_{=\,-\frac{5}{8}}\varepsilon^2 + \left(x^* + \frac{1}{2}(y^* - x^*) + \frac{5}{4}(100-180)\right)\varepsilon \end{aligned}$$

Med $x^* = 300$ og $y^* = 500$ oppgave **4c** innsatt i siste ledd:

$$K_{\text{ny}}(x^*_{\text{ny}}, y^*_{\text{ny}}) = K(x^*, y^*) - \frac{5}{8}\varepsilon^2 \tag{4.131}$$
$$+ \underbrace{\left(300 + \frac{5}{4}\Big(2(500-300) + (100-180)\Big) + \right)}_{=\,300} \varepsilon$$

$$= K(x^*, y^*) + \left(-\frac{5}{8}\varepsilon^2 + 300\varepsilon\right) \tag{4.132}$$

Konklusjon:

$$\text{økning optimal total kostnadsfunksjon} = -\frac{5}{8}\varepsilon^2 + 300\varepsilon \tag{4.133}$$